

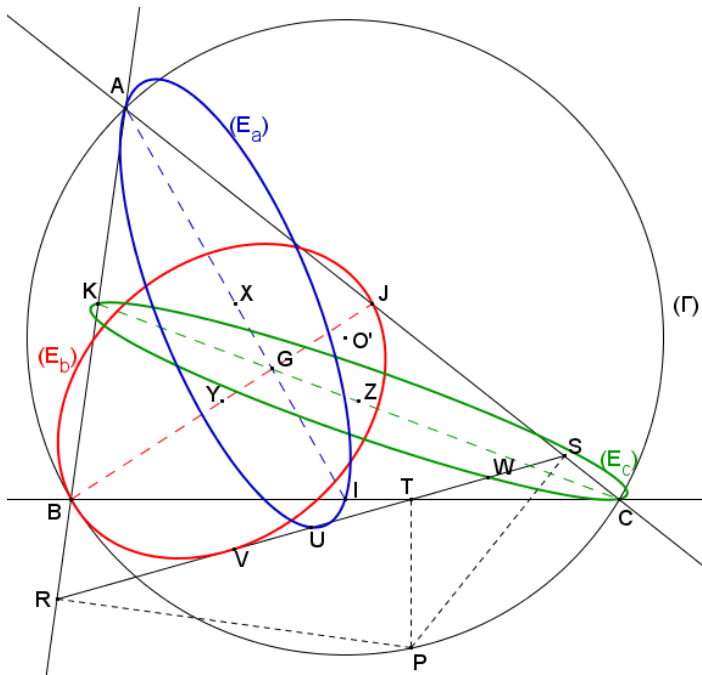
Problema 735.

Sea ABC un triángulo. Consideremos la circunferencia circunscrita. Sea G el baricentro de ABC. Sea P un punto genérico de la misma. Tracemos las proyecciones perpendiculares R a AB, S a AC y T a BC. Sean U, el punto medio de RS, V el de RT y W el de ST. Demostrar que los lugares geométricos de U, V y W cuando P recorre la circunferencia son elipses de centros X, Y, Z, puntos medios de las medianas.

Barroso, R. (2015): Comunicación personal.

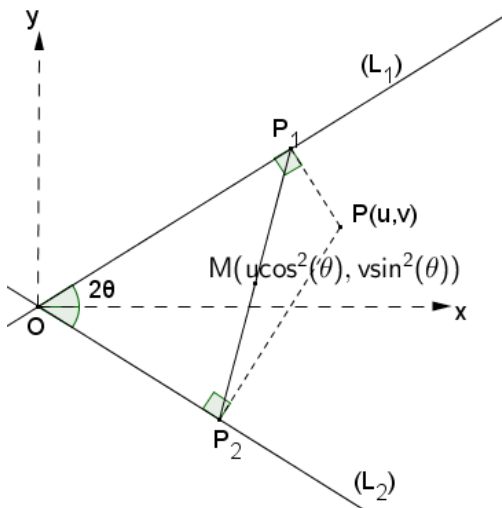
Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Les lieux des points U, V et W sont les trois ellipses (E_a) , (E_b) et (E_c) illustrées ci-après qui passent respectivement par les sommets A, B et C du triangle et les milieux I, J et K des côtés opposés à ces sommets et ont pour centres les points X, Y et Z milieux des médianes du triangle ABC.



Démonstration

Soient deux droites non parallèles L_1 et L_2 qui se rencontrent en un point O et font entre elles un angle interne 2θ . On prend pour axes Ox et Oy les deux bissectrices intérieure et extérieure de l'angle en O. On définit la transformation (T) qui à tout point P du plan de coordonnées (u,v) associe le milieu M du segment qui joint les projections P_1 et P_2 de P sur L_1 et L_2 .



Lemme : (T) est **une tranformation affine** qui admet Ox comme axe principal et fait passer le point P de coordonnées (u,v) au point M de coordonnées $[u.\cos^2(\theta), v.\sin^2(\theta)]$

En effet, les droites (L_1) et PP_1 ont respectivement pour équations :

$$y = \operatorname{tg}(\theta)x \text{ et } y - v = -\cotg(\theta).(x - u).$$

D'où les coordonnées de P_1 : $[u.\cos^2(\theta) + v.\sin(\theta)\cos(\theta), u.\sin(\theta)\cos(\theta) + v.\sin^2(\theta)]$,

puis celles de P_2 : $[u.\cos^2(\theta) - v.\sin(\theta)\cos(\theta), -u.\sin(\theta)\cos(\theta) + v.\sin^2(\theta)]$,

et enfin celles de M demi-sommes des coordonnées de P_1 et de P_2 : $[u.\cos^2(\theta), v.\sin^2(\theta)]$.

Il en résulte que si P est sur l'axe Ox, alors le point M est aussi sur l'axe Ox.

Corollaire :

Si le point P décrit un cercle $(\mathbf{C})$ de centre ω , alors le lieu de M est la courbe déduite de $(\mathbf{C})$ par la transformation $T(\mathbf{C})$. C'est donc une **ellipse** passant par O, admettant pour centre $T(\omega)$ et dont le demi-grand axe et le demi-petit axe sont parallèles aux bissectrices de l'angle en O, ont pour somme le rayon de $(\mathbf{C})$ et sont dans le rapport $\operatorname{tg}^2(\theta)$.

Pour plus de détails, consulter :

http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume8/Kalman/TransformedEqn.html

<http://megamaths.perso.neuf.fr/oral1/oral1cmon0004v123ellipseetaffinite.pdf>

En retenant par exemple le point U milieu de RS, on déduit que lorsque P décrit le cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC de centre O' , le lieu (E_a) de U est une ellipse qui a les caractéristiques suivantes :

- 1) elle passe par A,
- 2) elle passe par le milieu I de BC. En effet quand P est diamétralement opposé à A, les projections R et S de P sur les côtés AB et AC sont confondues avec les points B et C (les angles $\angle ABP$ et $\angle ACP$ sont droits). Le milieu de RS est alors le milieu I du côté BC.
- 3) elle admet pour centre le milieu X de la médiane AI. En effet quand P est diamétralement opposé à A, $T(P) = I$ et $T(O') = \text{milieu de AI} = X$.
- 4) ses axes sont parallèles aux bissectrices intérieure et extérieure de l'angle en A et sont dans le rapport $\operatorname{tg}^2(\alpha)$ avec $\angle BAC = 2\alpha$. Leur demi-somme est égale au rayon du cercle (Γ) .