

Problema 735.- Sea ABC un triángulo. Consideremos la circunferencia circunscrita. Sea G el baricentro de ABC .

Sea P un punto genérico de la misma. Tracemos las proyecciones perpendiculares R a AB , S a AC y T a BC . Sean U , el punto medio de RS , V el de RT y W el de ST .

Demostrar que los lugares geométricos de U , V y W cuando P recorre la circunferencia son elipses de centros X , Y , Z , puntos medios de las medianas.

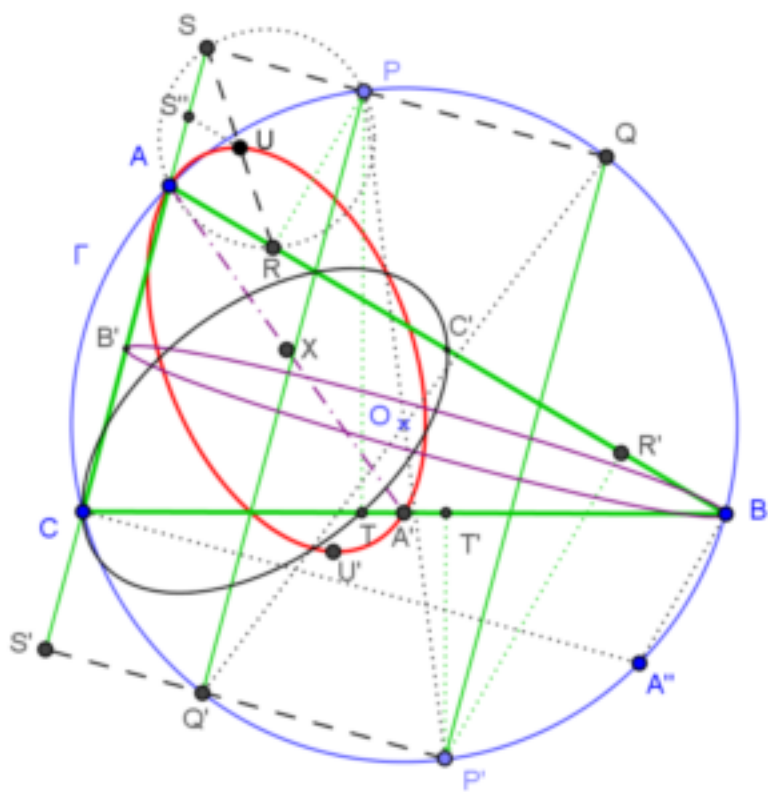
Barroso, R. (2015): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Sea Γ la circunferencia circunscrita y P sobre ella. Para hallar U trazamos la circunferencia de diámetro AP . Ésta corta a los lados AB y AC en R y S respectivamente. U es el punto medio de RS .

Esta circunferencia siempre cortará a los lados AB y AC , cualquiera que sea P (al menos en A), por tanto los puntos del lugar geométrico están en el plano afín.

Recíprocamente, si tenemos un punto U dado, la paralela a AB por U corta a AC en el punto medio S'' de AS . La recta SU corta a AB en R y ya tengo definido P tomando las perpendiculares por S a AC y por R a AB .



Se tiene pues, una correspondencia biunívoca entre los puntos del lugar geométrico y los de la circunferencia. Esta correspondencia, tal como se define, transformará cónicas en cónicas, por tanto el lugar geométrico que buscamos es una cónica que no tiene puntos en el infinito. Se trata de una elipse.

Vamos a centrarnos en el lugar geométrico descrito por el punto U .

Si $P = A$, las perpendiculares a AB y AC cortan en A , y el punto medio es el propio A . Así pues A es un punto del lugar geométrico buscado.

Si $P = A'$, el simétrico de A respecto del circuncentro O , es obvio que PC y PB son perpendiculares a AC y AB respectivamente, por tanto A' , el punto medio de BC , también es un punto del lugar.

Vamos a ver ahora que el punto medio X de la mediana AA' es centro de simetría del lugar geométrico de U .

Sean P, P' dos puntos diametralmente opuestos de Γ . Desde ellos se trazan perpendiculares al lado AC que cortan en S, S' y en Q, Q' a la circunscrita. Obviamente el cuadrilátero $PQP'Q'$ es un rectángulo, y por tanto, PQ' y SS' son segmentos iguales paralelos y también paralelos al lado AC . La mediatriz de PQ' es por tanto, la mediatriz de SS' y la de AC : los puntos S y S' son conjugados isotómicos.

Un argumento similar demuestra que R y R' también son conjugados.

Sea U' el punto medio del segmento $S'R'$. Ahora calcularemos el punto medio del segmento UU' .

Vamos a ver que AA' y UU' tienen el mismo punto medio.

El punto medio de este último es el definido por

$$\frac{1}{2}(U + U') = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(R + S) + \frac{1}{2}(R' + S')\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(R + R') + \frac{1}{2}(S + S')\right] = \frac{1}{2}(C' + B') = \frac{1}{2}AA': \text{ punto medio de la mediana } m_A.$$

En la figura se han añadido las otras dos elipses de los lugares geométricos de V y W . ■