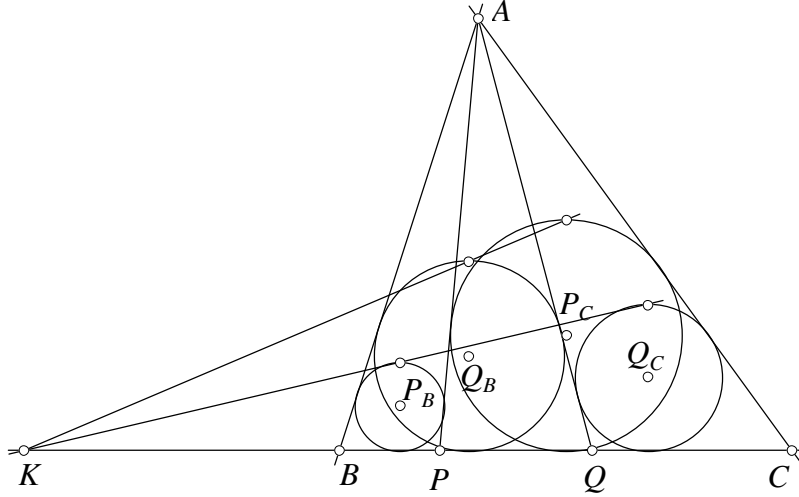


PROBLEMA 736 DE TRIÁNGULOSCABRI

Problema 736 de triánguloscabri. *Dados un triángulo ABC y dos puntos P y Q en el segmento BC . Sean (P_B) , (P_C) , (Q_B) y (Q_C) las circunferencias inscritas a los triángulos ABP , APC , ABQ y AQC . Entonces el centro de homotecia externo de las circunferencias (P_B) y (Q_C) coincide con el centro de homotecia externo de las circunferencias P_C y Q_B .*

Ramírez, A. (2009): Geometría Moderna (p. 153. Problema 12).

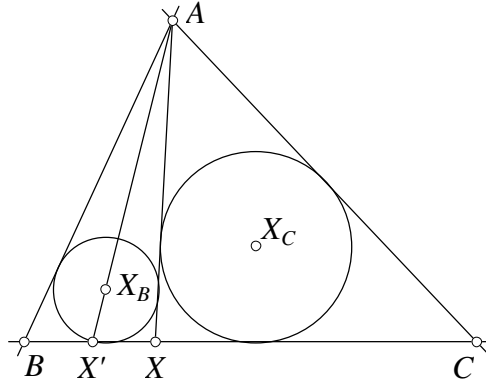
<https://talentomatematico.files.wordpress.com/2014/01/geometria-moderna.pdf>



Solución de *Francisco Javier García Capitán*. Comenzamos con algunos lemas relacionados con las coordenadas baricéntricas, que usaremos para resolver el problema:

Lema 1. *Si X está sobre BC y $BX : XC = t : 1 - t$, entonces el incentro X_B del triángulo ABX tiene coordenadas baricéntricas*

$$X_B = (at : AX + (1 - t)c : ct).$$



Demostración. Si $X' = AX_B \cap BC$, tenemos que $X = (0 : 1 - t : t)$ y, por el teorema de la bisectriz, $BX' : X'X = AB : AX = c : AX$ resulta que $X' = (0 : AX + (1 - t)c : tc)$. Como por otro lado, X_B está sobre la bisectriz $BI : cx - az = 0$, tenemos que $X_B = (at : AX + (1 - t)c : ct)$.

Por simetría, el incentro X_C del triángulo AXC tendrá coordenadas $X_C = ((1-t)a : (1-t)b : bt + AX)$.

Lema 2. Si X está sobre BC y $BX : XC = t : 1-t$, entonces $AX^2 = tb^2 + (1-t)c^2 - t(1-t)a^2$.

Demostración. Aplicando el teorema de Stewart a la ceviana AX ,

$$\begin{aligned} a \cdot (AX^2 + BX \cdot XC) &= b^2 \cdot BX + c^2 \cdot XC \\ \Rightarrow a \cdot (AX^2 + ta \cdot (1-t)a) &= b^2 \cdot ta + c^2 \cdot (1-t)a \\ \Rightarrow AX^2 &= tb^2 + (1-t)c^2 - t(1-t)a^2. \end{aligned}$$

Lema 3. Si X está sobre BC y $BX : XC = t : 1-t$, entonces

$$AX^2 - (tb - (1-t)c)^2 = (1-t)t(a+b+c)(b+c-a).$$

Demostración. Sumando miembro a miembro las igualdades

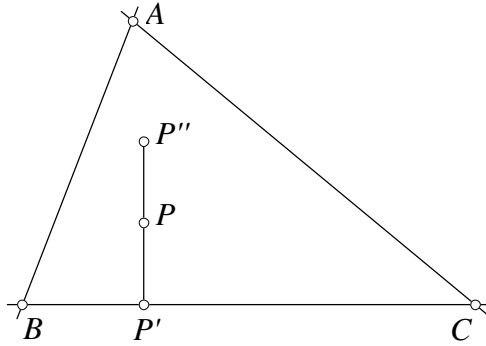
$$\begin{aligned} (tb - (1-t)c)^2 &= t^2b^2 + (1-t)^2c^2 - 2t(1-t)bc \\ (1-t)t(a+b+c)(b+c-a) &= (1-t)t(b^2 + c^2 + 2bc - a^2) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} (tb - (1-t)c)^2 + (1-t)t(a+b+c)(b+c-a) \\ = tb^2 + (1-t)c^2 - t(1-t)a^2 \\ = AP^2. \end{aligned}$$

Lema 4. Sean $P = (u : v : w)$ un punto cualquiera del plano del triángulo ABC , P' el pie de la perpendicular trazada por P a BC y P'' el simétrico de P' respecto de P . Entonces las coordenadas de P'' son

$$P'' = (2a^2u : a^2v - uS_C : a^2w - uS_B).$$



Demostración. Hallemos las coordenadas de P' . Para ello, hallemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y $(-a^2 : S_C : S_B)$, punto del infinito de una perpendicular a BC , y después su intersección con la recta $BC : x = 0$. Todo ello puede hacerse resolviendo el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ u & v & w \\ -a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (S_B u + a^2 w)y = (S_C u + a^2 v)z,$$

que da el punto $P' = (0 : S_C u + a^2 v : S_B u + a^2 w)$. Como la suma de las coordenadas de P' es $a^2(u + v + w)$, las coordenadas de P'' se deducen de la relación algebraica

$$\begin{aligned} P'' &= 2P - P' = 2(a^2 u, a^2 v, a^2 w) - (0, S_C u + a^2 v, S_B u + a^2 w) \\ &= (2a^2 u, a^2 v - S_C u, a^2 w - S_B u). \end{aligned}$$

Solución del problema 736. Supongamos que $P = (0 : 1 - p : p)$ y $Q = (0 : 1 - q : q)$. Entonces, usando el Lema 1, tenemos que $P_B = (ap : AP + c(1 - p) : cp)$ y $Q_C = (a(1 - q) : b(1 - q) : AQ + bq)$. Llamando P'_B y Q'_C a las proyecciones sobre la recta BC y P''_B y Q''_C a los simétricos de éstas respecto de P_B y Q_C , respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} P''_B &= (2pa^2 : aAP + (1 - p)ac - pS_C, 2p(s - a)(s - c)), \\ Q''_C &= (2(1 - q)a^2 : 2(1 - q)(s - a)(s - b) : aAQ + qab - (1 - q)S_B). \end{aligned}$$

La recta $P''_B Q''_C$ corta a BC en el punto

$$K_{PQ} = (0 : -(1 - q)(AP - pb + (1 - p)c) : p(AQ + qb - (1 - q)c)).$$

Por simetría, si consideramos los centros P_C y Q_B obtendríamos que la recta $P''_C Q''_B$ correspondiente corta a la recta BC en el punto

$$K_{QP} = (0 : -(1 - p)(AQ - qb + (1 - q)c) : q(AP + pb - (1 - p)c)).$$

Teniendo en cuenta que los puntos $(0 : m : n)$ y $(0 : m' : n')$ son el mismo si y solo si $mn' = m'n$, para comprobar que $K_{PQ} = K_{QP}$ debemos comprobar que se cumple

$$q(1 - q)(AP^2 - (pb - (1 - p)c)^2) = p(1 - p)(AQ^2 - (qb - (1 - q)c)^2),$$

y ello es una consecuencia inmediata del Lema 4.