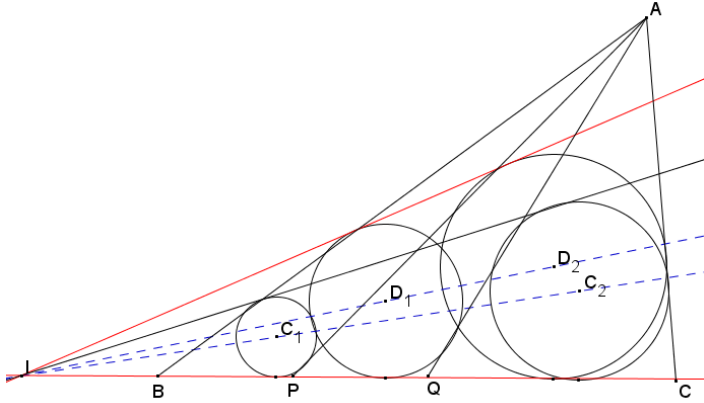


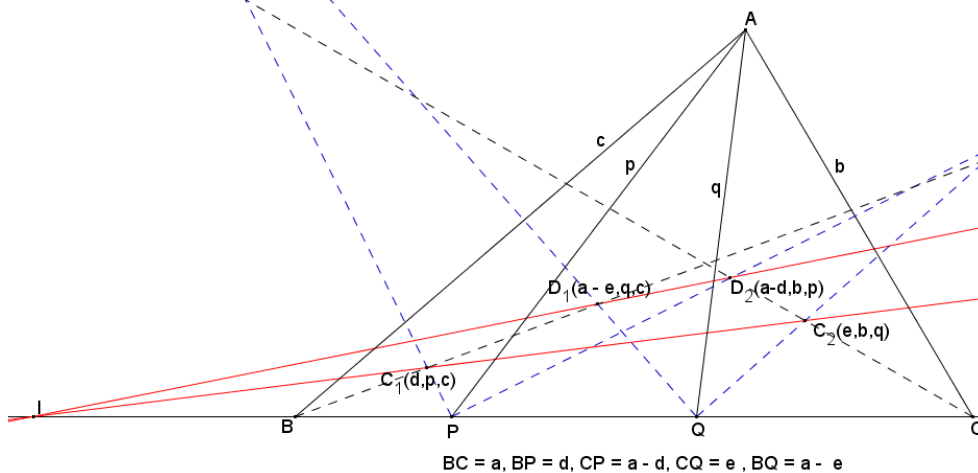
Problema 736

Dados un triángulo $\triangle ABC$ y dos puntos P y Q en el segmento BC . Sean C_1 , C_2 , D_1 y D_2 los incírculos de los triángulos $\triangle ABP$, $\triangle AQC$, $\triangle ABQ$ y $\triangle APC$. Entonces el centro de homotecia externo de los círculos C_1 y C_2 coincide con el centro de homotecia externo de los círculos D_1 y D_2 . Ramírez, A. (2009): [Geometría Moderna](#). (p. 153. Problema 12).

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Les centres d'homothéties externes des cercles de centres C_1 et C_2 d'une part et des cercles de centres D_1 et D_2 d'autre part coïncident si les droites C_1C_2 et D_1D_2 sont concourantes en un point même point I situé sur la droite BC et réciproquement.



Nous allons démontrer que les points d'intersection I_1 et I_2 de C_1C_2 et D_1D_2 avec la droite BC sont confondus en un même point I .

Les longueurs des segments suivants sont désignés par $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AP = p$, $AQ = q$ puis $BP = d$, $CQ = e$ d'où $CP = a - d$ et $BQ = a - e$

La loi des cosinus dans le triangle ABC permet d'exprimer p et q en fonction de a, b, c, d et e :

$$R_1 : p^2 = c^2 + d^2 - d(a^2 + c^2 - b^2)/a \text{ et } R_2 : q^2 = b^2 + e^2 - e(a^2 + b^2 - c^2)/a$$

Comme les points C_1, C_2, D_1 et D_2 sont respectivement les centres des cercles inscrits aux triangles ABP, AQC, ABQ, APC , leurs [coordonnées barycentriques](#) établies dans chacun de ces triangles sont:

$$C_1 : [d, p, c] \text{ équivalent à } \vec{C_1} = (d\vec{A} + p\vec{B} + c\vec{P})/(c + d + p)$$

$$C_2 : [a - e, b, q] \text{ équivalent à } \vec{C_2} = (a\vec{A} + b\vec{Q} + q\vec{C})/(a + b + q)$$

$$D_1 : [e, q, c] \text{ équivalent à } \vec{D_1} = ((a - e)\vec{A} + q\vec{B} + c\vec{Q})/(a + c - e + q)$$

$$D_2 : [a - d, b, p] \text{ «équivalent à } \vec{D_2} = ((a - d)\vec{A} + b\vec{P} + p\vec{C})/(a + b - d + p)$$

Comme on a $\vec{P} = (a - d)\vec{B}/a + d\vec{C}/a$ et $\vec{Q} = e\vec{B}/a + (a - e)\vec{C}/a$, les coordonnées barycentriques du point C_1 dans le triangle ABC sont alors données par :

$$\vec{C_1} = d\vec{A} + (p + c(a - d))\vec{B}/a + d\vec{C}/a \text{ soit } C_1 : [ad, ap + ac - cd, de]$$

De la même manière, on obtient $C_2 : [ae, be, aq + ab - be]$ puis $D_1 : [a^2 - ae, aq + ce, ac - ce]$ et $D_2 : [a^2 - ad, ab - bd, ap + bd]$

Les équations des droites C_1C_2 et D_1D_2 s'expriment à l'aide des deux déterminants suivants:

Droite C_1C_2 :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ ad & ap+ac-cd & cd \\ ae & be & aq+ab-be \end{vmatrix} = 0$$

Droite D_1D_2 :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a(a-e) & aq+ce & e(a-e) \\ a(a-d) & b(a-d) & ap+bd \end{vmatrix} = 0$$

Les points d'intersection I_1 et I_2 des droites C_1C_2 et D_1D_2 avec la droite BC sont définis par $x = 0$ dans chacun des deux déterminants.

Les coordonnées barycentriques de $I_1 (0, x_1, y_1)$ obtenues en développant le premier déterminant obéissent à l'équation: $d[a(b+q) - e(b+c)]y_1 = e[-a(c+p) + d(b+c)]z_1$

Et celles de I_2 sont données par l'équation:

$$(a-e)[a(p-c) + d(b+c)]y_2 = (a-d)[a(b-q) - e(b+c)]z_2$$

On en déduit que les points I_1 et I_2 sont confondus si et seulement si les coefficients de y_1 et z_1 ceux de y_2 et z_2 sont dans le même rapport, ce qui donne l'équation :

$$d[a(b+q) - e(b+c)](a-d)[a(b-q) - e(b+c)] = (a-e)[a(p-c) + d(b+c)]e[-a(c+p) + d(b+c)]$$

qui équivaut à :

$$d(a-d)[a^2(b^2-q^2) + e^2(b+c)^2 - 2ab(b+c)e] = e(a-e)[a^2(c^2-p^2) + d^2(b+c)^2 - 2ac(b+c)d]$$

En utilisant les relations R_1 et R_2 supra, on élimine les termes en p et q dans les deux membres, ce qui donne :

$$(a-d)[a(a^2+b^2-c^2-ae) + e(b+c)^2 - 2ab(b+c)] = (a-e)[a(a^2-b^2+c^2-ad) + d(b+c)^2 - 2ac(b+c)]$$

$$\text{Or } (a-d)[a(a^2+b^2-c^2-ae)] - (a-e)[a(a^2-b^2+c^2-ad)] = a(b^2-c^2)(2a-d-e)$$

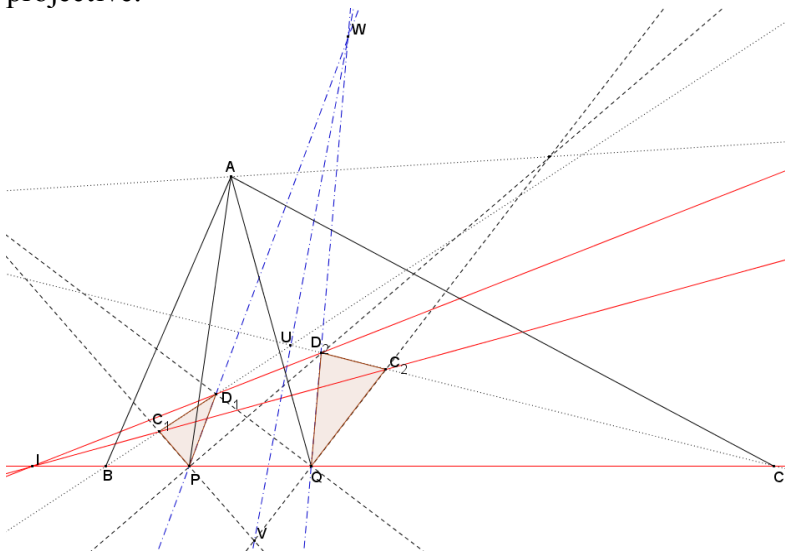
$$\text{puis } (a-d)e(b+c)^2 - (a-e)d(b+c)^2 = a(b+c)^2(e-d)$$

$$\text{et } 2(a-d)ab(b+c) - 2(a-e)ac(b+c) = 2a(b+c)(ab-ac-bd+ce)$$

Après simplification par le terme $a(b+c) > 0$ commun à ces trois expressions, on obtient:

$$(b-c)(2a-d-c) + (b+c)(e-d) - 2(ab-bd-ac+ce) = 0 \text{ qui se vérifie aisément. Cqfd}$$

Nota : le problème peut se traiter également avec les théorèmes les plus connus de la géométrie projective.



Les triangles PC_1D_1 et QC_2D_2 sont vus en perspective à partir du point I et d'après le théorème de Desargues cette propriété est équivalente à l'alignement des points U, V et W qui sont respectivement à l'intersection des droites BD_1 et CD_2 , PC_1 et QC_2 et enfin PD_1 et QD_2 . La démonstration de notre problème revient donc à démontrer l'alignement des points U, V et W.