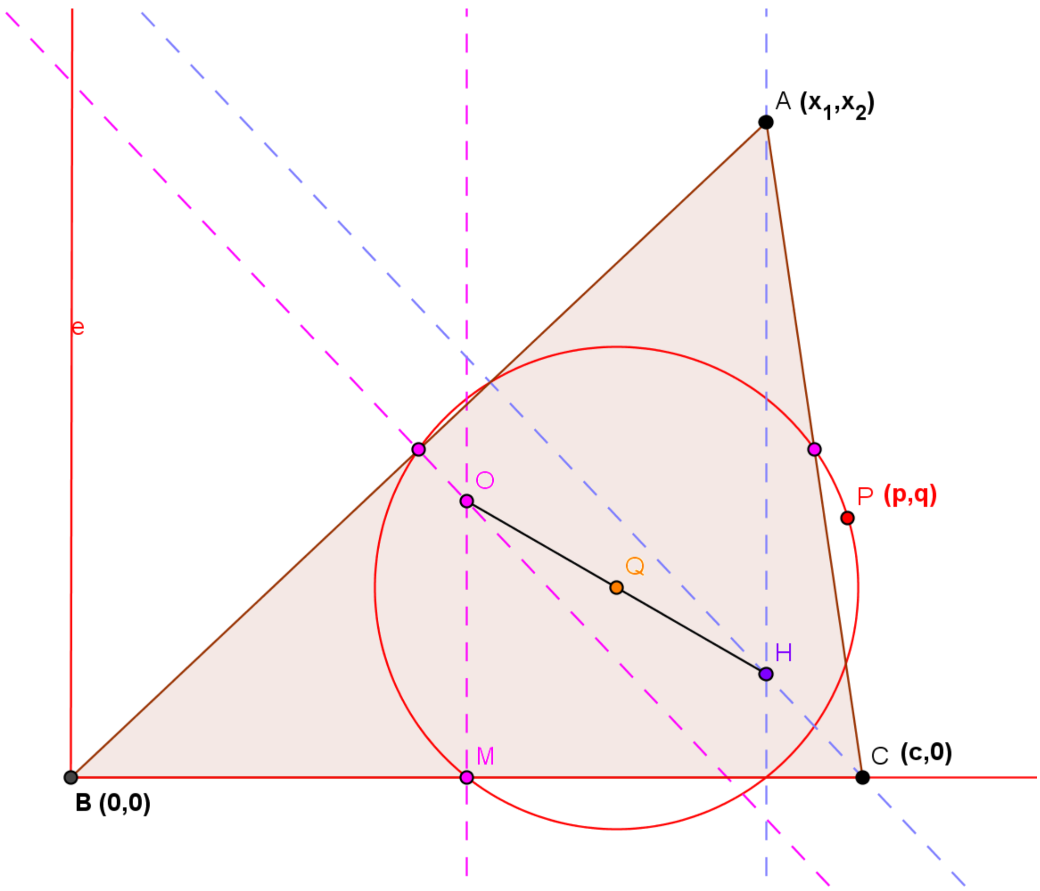
<u>**Problema 737**</u> <u>(Por Adolfo Soler)</u>

Dados tres puntos B, C y P, hallar el lugar geométrico del punto A tal que la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC pasa por P.

<u>Solución:</u>



Dado el triángulo de la figura, calcularemos las coordenadas del:

<u>Ortocentro H</u>

$$(x = x_1) \cap \left(y = \frac{-x_1}{x_2}(x - c)\right) = \boldsymbol{\left(x_1, \frac{-x_1}{x_2}(x_1 - c)\right)}$$

<u>Circuncentro O</u>

$$\left(x = \frac{c}{2}\right) \cap \left(y - \frac{y_1}{2} = \frac{-x_1}{x_2}\left(x - \frac{x_1}{2}\right)\right) = \boldsymbol{\left(\frac{c}{2}, \frac{x_2}{2} - \frac{x_1(c - x_1)}{2x_2}\right)}$$

Es fácilmente deducible que el centro de la circunferencia de Feuerbach, es el punto medio del segmento formado por el Circuncentro y el Ortocentro del triángulo, por tanto:

Centro Circunferencia de Feuerbach Q

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{c}{4} + \frac{x_1}{2} \; , \frac{x_2}{4} + \frac{x_1\,(c - x_1)}{4\,x_2} \right)$$

Como los puntos P y M pertenecen a la circunferencia de Feuerbach, se cumplirá que:

$\overline{QM} = \overline{QP}$, que tras sustituir Q, P y M por sus coordenadas cartesianas, operar y simplificar, se obtiene la siguiente cónica:

$$q{x_1}^2 - \; q{x_2}^2 - qcx_1 + (2p^2 + 2q^2 - pc)x_2 + (c - 2p)x_1x_2 = 0$$

Al ser los coeficientes de x_1 y de x_2 opuestos, la cónica obtenida es una Hipérbola Equilátera.