Pr. Cabri 737
propuesto por García Capitán
Solución de César Beade Franco

Enunciado

Dados tres puntos B, C y P, hallar el lugar geométrico del punto A tal que la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC pasa por P.

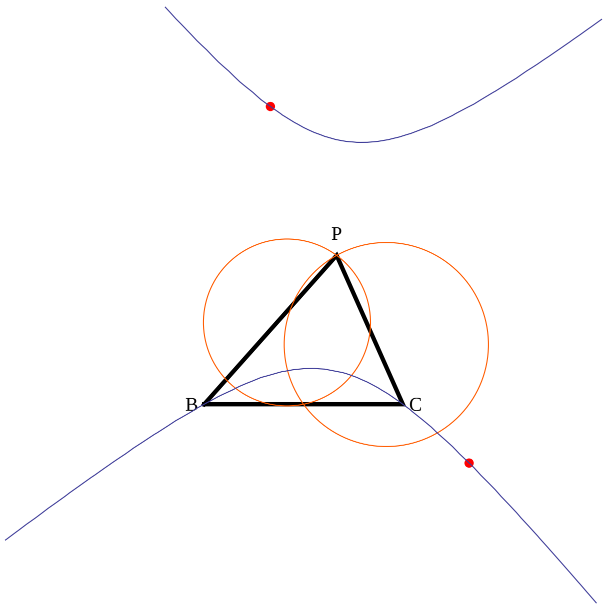
Solución

I. Sean los puntos A = (x,y), B = (0,0), C = (1,0) y P = (a,b).

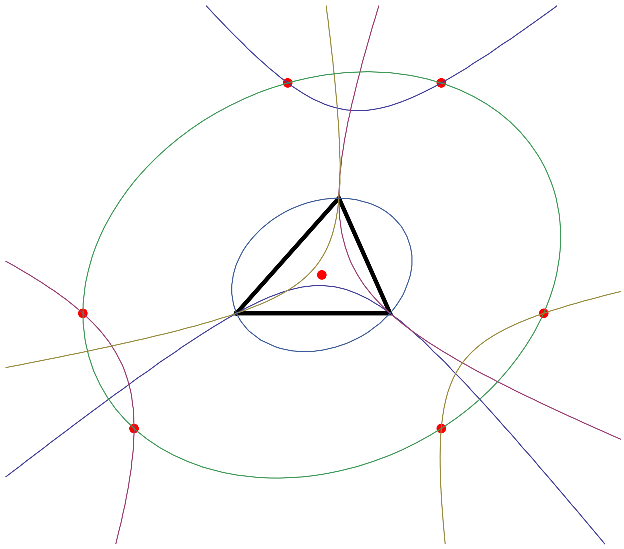
II. La circunferencia de los 9 puntos del triángulo ABC tiene centro C_9 = $\left(\frac{1}{4}(1+2x), \frac{x-x^2+y^2}{4y}\right)$ y radio $r_9 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{((-1+x)^2+y^2)(x^2+y^2)}{y^2}}$ (1).

III. Si dicha circunferencia pasa por P, entonces la distancia de P a C_9 es siempre r_9, $|PC_9| = r_9$, lo que nos proporciona la ecuación implícita del lugar buscado. Esta es $2b^2y + (-1+2a)(a-x)y + b\left(-x+x^2-y^2\right) = 0$, ecuación de una cónica.

IV. Si calculamos sus invariantes (2) descubrimos que dicha curva es una hipérbola equilátera. Además su centro es el punto P y pasa siempre por B y C.



V. Podemos permutar los puntos B, C, P y obtener tres hipérbolas. Cada una de ellas pasa por dos vértices y tiene al otro como centro. Además cada hipérbola contiene a los simétricos de estos puntos respecto a su centro. Seis puntos en total que están situados sobre una elipse.



VI. Esta elipse, que tiene como centro el baricentro de BCP, es homotética de la ex-elipse de Steiner del triángulo y su razón de homotecia es $\sqrt{7}$.

Notas

(1) Los cálculos se realizaron con el programa *Mathematica*.

(2) Los que interesan son $a_{11}.a_{22} - a_{12}{}^2 = -\frac{1}{4} + a - a^2 - b^2 < 0$ y $a_{11} + a_{22} = 0$.