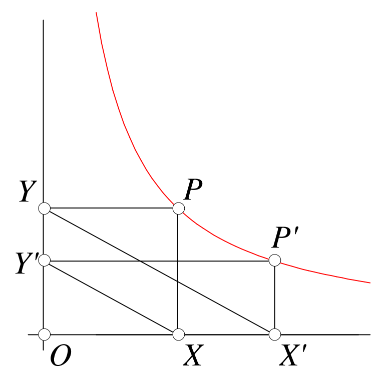
Problema 737 de triánguloscabri. *Dados tres puntos B, C y P, hallar el lugar geométrico del punto A tal que la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC pasa por P.*

Propuesto y resuelto por Francisco Javier García Capitán.

Solución con coordenadas. Antes de dar la solución con coordenadas, hagamos una observación sobre la hipérbola equilátera.

Determinación de una hipérbola equilátera. Una hipérbola equilátera está determinada si se conocen un punto P de ellas y las asíntotas se cortan en O, tenemos que si X, Y son las proyecciones de P sobre las asíntotas y O es el centro de la hipérbola, el producto $OX \cdot OY$ es constante. De esta manera, si P' es otro punto con proyecciones X', Y' se tendrá $OX \cdot OY = OX' \cdot OY'$.



Entonces, conocidos X, Y, X', trazamos la paralela por X a $X'Y$, que encuentra a OY en Y' y así podemos construir el punto P' de la hipérbola.

Ecuación del lugar geométrico. Ahora, considerando coordenadas cartesianas con $B = (-a, 0)$, $C = (a, 0)$, $P = (u, v)$ y $A = (x, y)$, al calcular el circuncentro, ortocentro y centro de los nueve puntos obtenemos

$$O = \left(0, \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2y}\right), \quad H = \left(x, \frac{a^2 - x^2}{y}\right), \quad N = \left(\frac{x}{2}, \frac{a^2 + y^2 - x^2}{2y}\right).$$

Siendo $M = (0, 0)$ el punto medio de BC, la condición $NP = NM$ conduce a la ecuación del lugar geométrico, una cónica:

$$\varphi(x, y) = vx^2 - vy^2 - 2uxy + 2(u^2 + v^2)y - a^2v = 0.$$

Por ser $\varphi(\pm a, 0) = 0$, la cónica pasa por B y C.

Centro de la cónica. El centro de la cónica o punto de intersección de las rectas es el punto P:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \Rightarrow vx - uy = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \Rightarrow ux + vy = u^2 + v^2 \end{cases} \Rightarrow x = u, y = v.$$

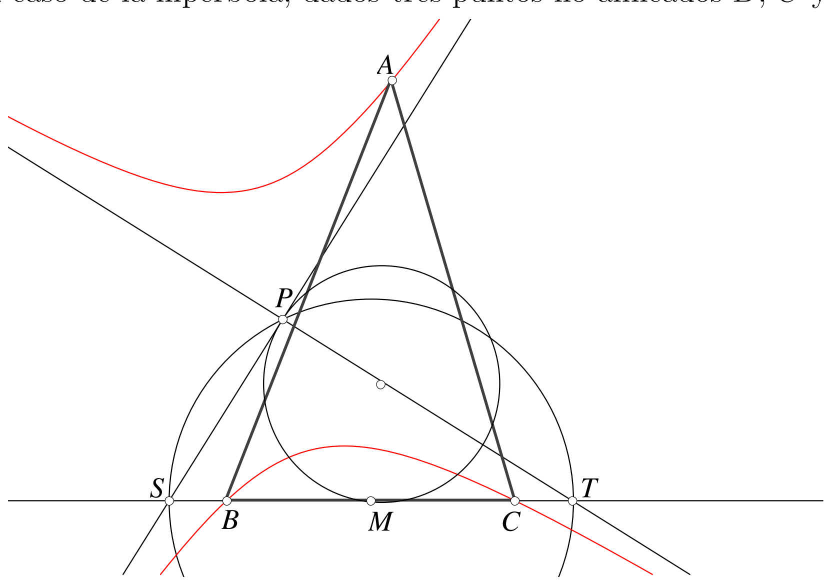
Puntos del infinito. Llevando el origen al centro de la cónica ($x = X + u, y = Y + v$), su ecuación se expresa $vX^2 - 2uXY - vY^2 + v(u^2 + v^2 - a^2) = 0$, por lo que la cónica estará formada por dos rectas reales secantes si $u^2 + v^2 = a^2$, es decir si P está sobre la circunferencia de diámetro BC, o una hipérbola en caso contrario.

Asíntotas. Para obtener las asíntotas en el caso de la hipérbola, hacemos $Y = mX$ en la ecuación reducida anterior e imponemos que se anule el coeficiente de X^2, obteniendo $vm^2 + 2um - v = 0$. Observamos que el producto de las dos soluciones m_1 y m_2 de esta ecuación es igual a -1, por lo que nuestra hipérbola es equilátera. Deshaciendo el cambio de variable, las asíntotas de la hipérbola tienen ecuaciones

$$y = v + \frac{-u \pm \sqrt{u^2 + v^2}}{v}(x - u),$$

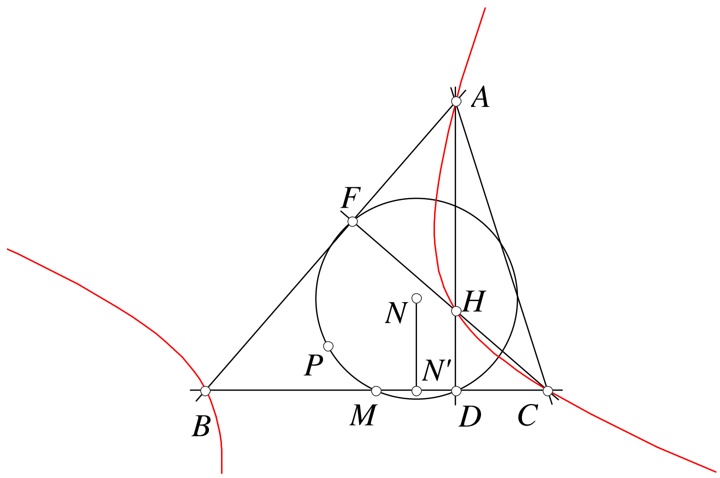
que cortan al eje $y = 0$ en los puntos S y T de coordenadas $(\mp\sqrt{u^2 + v^2}, 0)$, es decir los puntos sobre la recta BC tales que $OS = OT = OP$.

Construcción. Los cálculos anteriores facilitan la siguiente construcción en el caso de la hipérbola, dados tres puntos no alineados B, C y P:



1. Hallamos el punto medio M de BC.
2. Trazamos la circunferencia con centro M y radio MP, que corta a la recta BC en los puntos S y T.
3. Las rectas PS y PT son las asíntotas de la hipérbola. Si S, T coinciden con BC, el lugar geométrico estará formada por las rectas PB y PC.
4. La hipérbola queda determinada, ya que tenemos dos puntos B y C y las asíntotas. Además, cuando B, C y P estén en posición general vamos a poder usar las simetrías respecto de los ejes y del centro para obtener más puntos directamente.

Solución proyectiva. La siguiente figura muestra un triángulo ABC, sus alturas AD y CF, que se cortan en H, el punto medio M de BC y un punto P sobre su circunferencia de los nueve puntos (DFM).



Definición de una homografía. Esta figura también ilustra la siguiente construcción, dados los tres puntos no alineados B, C y P y una recta m que pasa por B:

1. M es el punto medio de BC.
2. F es el pie de la perpendicular a m trazada por C.
3. D es la segunda intersección de la circunferencia (PFM) y la recta BC. De otra forma, si N es el circuncentro de (PFM) y N' es su proyección sobre BC, entonces D es el simétrico de M respecto de N'.
4. A es la intersección de la recta m y la perpendicular por D a BC.

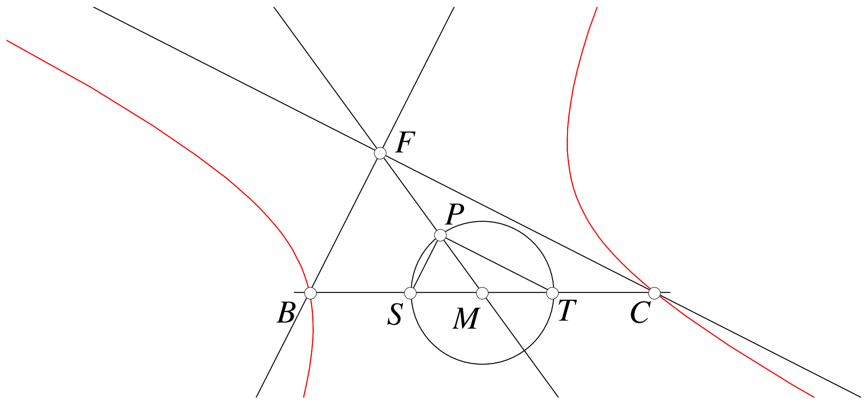
Esta construcción permite asociar a cada recta m que pasa por B una recta $\varphi(m) = CA$ que pasa por B definiendo una aplicación proyectiva, por la forma en que está construida, entre los haces B^* y C^*.

Por el teorema de Chasles-Steiner, los puntos de intersección de dos haces homólogos por esta homografía describen una cónica que pasa por B y C.

Se trata de una hipérbola equilátera. Comprobemos que si A pertenece al lugar geométrico, también pertenece el ortocentro H de ABC. En efecto, si $m = BH$, la perpendicular a m por C es la recta CA, que corta a BH en el pie E de la altura trazada por B. Ahora, la circunferencia PME es la circunferencia de los nueve puntos, que vuelve a cortar a la recta BC en el pie D de la altura trazada por A, y la perpendicular por D a BC encuentra a BH en H, por lo que CH sería la imagen de la homografía y $H = BH \cap CH$ pertenece al lugar geométrico.

Por el teorema de Poncelet-Brianchon, una cónica circunscrita a un triángulo que pase por su ortocentro sólo puede ser una hipérbola equilátera.

Dirección de las asíntotas. Si la circunferencia con centro M que pasa por P corta a BC en los puntos S y T, al trazar, por ejemplo una recta por B paralela a PS, los puntos F, M y P están alineados, ya que los triángulos FBC y PST son homotéticos. Entonces, el punto D es el punto del infinito de la recta BC y A es el punto del infinito de la recta PS. De la misma forma, el punto del infinito de la recta PT también está sobre la hipérbola.



El centro de la hipérbola es P. Para demostrar que P es el centro de la hipérbola, usamos que el lugar geométrico de todas las hipérbolas equiláteras circunscritas a un triángulo es su circunferencia de los nueve puntos. Entonces, para todos los puntos A sobre esta hipérbola, su centro sólo puede ser un punto común a todas las correspondientes circunferencias de los nueve puntos, es decir, bien P o bien M. Pero si fuera M, la hipérbola tendría que estar formada por la recta BC y su mediatriz, y esto es imposible, ya que entonces los puntos del infinito de la hipérbola serían el punto del infinito de la recta BC y el de su perpendicular, hecho que no es cierto.