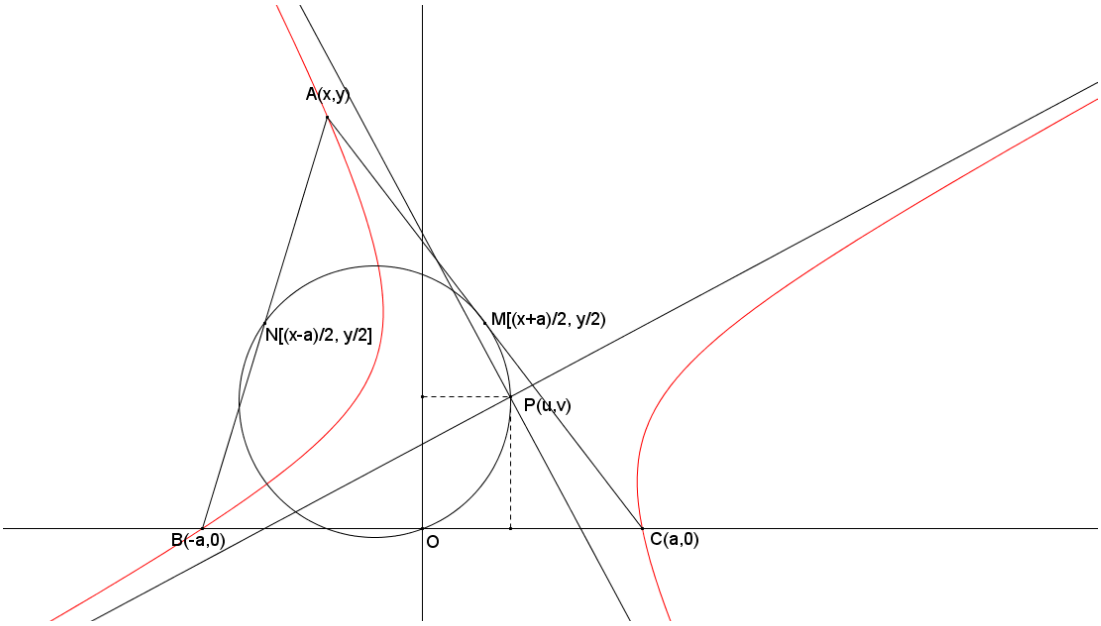
Problema 737

Dados tres puntos B, C y P, hallar el lugar geométrico del punto A tal que la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC pasa por P.

Garcia Capitán, F. (2015) : Comunicación personal

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Il est bien connu que le cercle des neuf points d'un triangle ABC passe par les milieux des côtés de ce triangle.
Sans perte de généralité, on prend l'origine O au milieu du segment BC de longueur 2a. Le point P a pour coordonnées (u,v) et le sommet A est de coordonnées (x,y).
Les coordonnées des milieux M et N des côtés AC et AC sont alors M : $(x+a)/2$, $y/2$ et N : $(x - a)/2$, $y/2$.
L'équation générale d'un cercle (Γ) qui passe par l'origine est $X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y = 0$
Lorsque ce cercle passe par les milieux M et N des côtes AC et AB, on a les deux relations :
$(x + a)^2/4 + y^2/4 - \alpha(x + a) - \beta y = 0$ et $(x - a)^2/4 + y^2/4 - \alpha(x - a) - \beta y = 0$
d'où l'on déduit $\alpha = x/2$ et $\beta = (y^2 - x^2 + a^2)/4y$
Comme (Γ) passe par le point P, on a l'équation :
$u + v - ux - (y^2 - x^2 + a^2)v /2y = 0$
D'où l'équation qui donne le lieu de A : $v(y^2 - x^2) + 2uxy - 2(u^2 + v^2) y + va^2 = 0$
Il s'agit d'une hyperbole équilatère (voir courbe en rouge dans la figure supra) centrée en P et dont les asymptotes sont les deux droites perpendiculaires d'équation $y - v = t(x - u)$ et $y - v = t'(x - u)$ avec $t = \left(\sqrt{\frac{u^2}{v^2}+1} - \frac{u}{v}\right)$ et $t' = -1/t$.