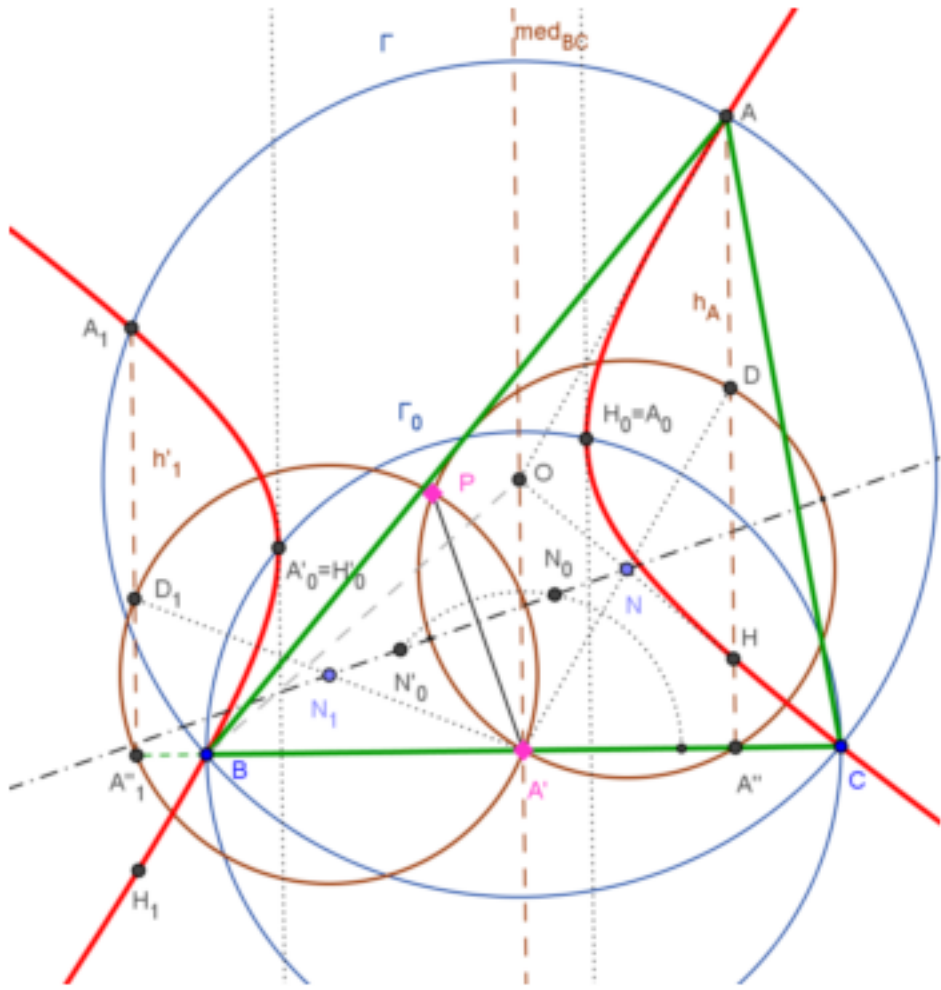


Problema 737.- Dados tres puntos B, C y P , hallar el lugar geométrico del punto A tal que la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC pasa por P .

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



1) Para comenzar vemos que si N es el centro de la circunferencia de Euler de ABC , de ortocentro H , también lo es de la de BCH , pues pasa por los puntos medios de BH, CH y BC , lados de BCH . Por tanto, como el ortocentro de BCH es A resulta que si A es un punto del lugar geométrico buscado, también lo es H .

2) Dados B, C y P , la c. de los nueve puntos de ABC ha de pasar por el punto medio A' de BC y también por P . Es por tanto, una circunferencia del haz de las que tiene como eje radical la recta $A'P$. Su centro es un punto de la mediatriz n de este segmento; como su radio es la mitad del radio R de la circunscrita, el menor valor de R para ésta es la mitad del segmento BC . Para hallar el centro N_0 de la correspondiente circunferencia de los nueve puntos, trazo desde A' un arco de radio $\frac{BC}{4}$ que corta a n , mediatriz de $A'P$ en dos puntos N_0 y N'_0 . En estos dos casos, el

lado BC es un diámetro de la circunscrita y por tanto el triángulo ABC es rectángulo en A : su ortocentro también es A . Los dos puntos obtenidos son A_0 y A'_0 .

Todos los puntos de n , excepto los del segmento abierto comprendido entre los puntos N_0 y N'_0 son posibles centros de la circunferencia de los nueve puntos.

3) Tomado un punto N sobre n , la circunferencia de radio NA' vuelve a cortar al segmento BC (o a su recta soporte) en otro punto A'' , pie de la altura desde A . La circunferencia circunscrita tiene radio igual al doble de ésta, su centro O está en el mismo semiplano que N respecto de BC . El ortocentro H es el simétrico de O respecto de N . Y el ortocentro de BCH es A . Ya tenemos A y H . (También podemos hallar A trazando la altura -perpendicular a BC por A'' - hasta intersectar a la circunscrita).

Para el punto N_1 simétrico de N respecto de $A'P$ se tiene la misma circunferencia circunscrita y otro par de puntos del lugar geométrico. Así podemos ir construyendo uno a uno los puntos del lugar.

4) Dado un punto A^* del lugar, N^* es el centro de la circunferencia que pasa por A', P y por el pie de la perpendicular desde él a BC . En esa perpendicular hay otro punto del lugar, el ortocentro de BCA^* .

Como el radio de la circunscrita queda fijado al elegir N^* , deducimos que sobre cada recta perpendicular a BC hay dos puntos del lugar geométrico buscado (salvo el segmento excepcional que hemos mencionado antes en 2).

El punto medio de ellos es D , otro punto de la c de Euler y de la altura desde A , por tanto, D es el simétrico de A' respecto de N . Al variar N sobre n , el punto D va describiendo una recta paralela a ésta p , que pasa por P .

5) Cuando el pie de la altura desde A , punto A'' se desplaza hasta coincidir con C , el triángulo ABC es rectángulo en C , que es su ortocentro y por tanto otro punto del lugar. La circunferencia de Euler es la que pasa por A', P y C . Igualmente el punto B también forma parte del lugar.

6) Una cónica que pasa por los tres vértices de un triángulo y su ortocentro es una hipérbola equilátera. Su centro es, lógicamente, un punto de la circunferencia de Euler: un punto común a todas ellas al variar A . Sólo puede ser P o A' . Según acabamos de ver en 4), la recta p es el diámetro conjugado con la dirección de las perpendiculares a BC , por tanto, P es el centro. Este es el lugar geométrico buscado. Es evidente que todos los puntos de la cónica son del lugar y recíprocamente, si un punto del lugar no estuviera sobre esta hipérbola, una paralela a la mediatriz m de BC por él, define dos puntos de esta hipérbola y tendríamos ya tres puntos del lugar sobre esa recta, que según hemos dicho en 4) es imposible. Y con esto concluimos. ■