Problema 738

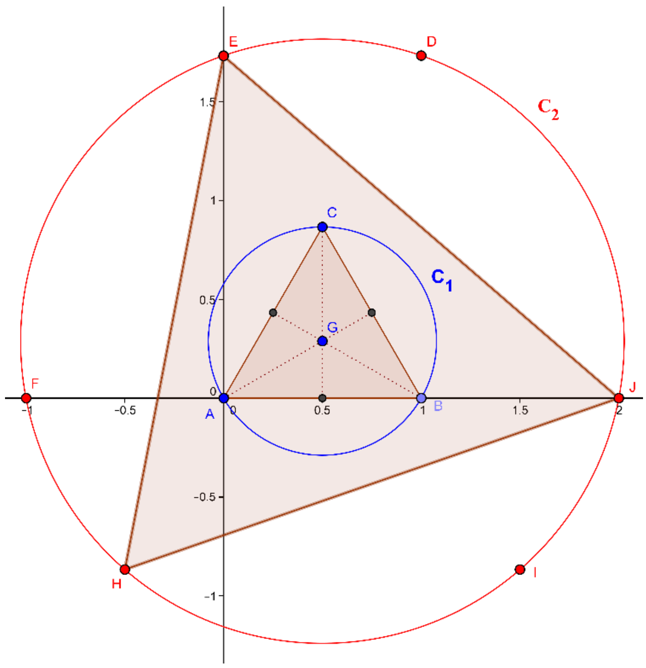
Sea un triángulo ABC. En cada vértice prolongamos los dos lados que en él convergen multiplicando su longitud por un mismo factor k. Así, en A prolongamos el lado BA hasta un punto P tal que BP = k.BA y el lado CA hasta Q de modo que CQ = k.CA, etc.

Demostrar que los 6 puntos así obtenidos están sobre una elipse homotética a la ex-elipse de Steiner y calcular dicha razón de homotecia.

Beade, C. (2015): Comunicación personal

Solución (Por Adolfo Soler):

Supongamos inicialmente que el triángulo ABC es un triángulo equilátero, por sencillez de cálculo, aunque sin pérdida de generalidad, de vértices A= (0,0), B= (1,0) y C= $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.



La circunferencia C_1 circunscrita al triángulo ABC será:

$$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{6})^2=\frac{1}{3}$$

Aplicando la homotecia de razón k definida en el enunciado, obtenemos los puntos:

D= $(\frac{k}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}k)$; E= $(1-\frac{k}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}k)$; F= (1-k, 0);

H = $(\frac{1-k}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}(1-k))$; I = $(\frac{1+k}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}(1-k))$; J = (k, 0).

Estos puntos son equidistantes al Baricentro G = $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6})$ del triángulo ABC, con lo cual la cónica que pasa por los puntos D, E, F, H, I, J, es una circunferencia C_2 concéntrica a C_1 y de ecuación:

$$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{6})^2=k^2-k+\frac{1}{3}$$

Por otra parte, es conocido que a partir del triángulo equilátero ABC, existe un endomorfismo afín que lo transforma en un triángulo genérico A' = (0,0); B' = (1,0); C' = (a, b) cuya matriz es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2a-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2b}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Aplicando el citado endomorfismo a las ecuaciones paramétricas de la circunferencia C_1:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2a-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2b}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

resulta la cónica de ecuación C'_1:

$$x'^2+\frac{3+(1-2a)^2}{4b^2}y'^2-x'-\frac{(1-a)}{b}y'-\frac{(1-2a)}{b}x'y'=0$$

Que tras comprobar sus invariantes resulta ser **una elipse.**

Análogamente, aplicando el endomorfismo afín a la circunferencia C_2, se obtiene **otra elipse C'_2** de ecuación:

$$x'^2 + \frac{3+(1-2a)^2}{4b^2}\,y'^2 - x' - \frac{(1-a)}{b}\,y' - \frac{(1-2a)}{b}x'y' + (\frac{1}{3} - (k^2 - k + \frac{1}{3})) = 0$$

Al conservar un endomorfismo afín el cociente de áreas y ser la circunferencia C_1, la elipse (degenerada en circunferencia) de área mínima, la elipse C'_1 que circunscribe al triángulo A'B'C' será la elipse de área mínima y por tanto la ex-elipse de Steiner del triángulo A'B'C'.

Al conservar un endomorfismo afín las razones de homotecia y ser C_1 y C_2 circunferencias homotéticas de razón el cociente de sus radios, las elipses C'_1 y C'_2, serán también homotéticas con la misma razón de homotecia, es decir:

Razón de Homotecia: $\frac{\sqrt{k^2-k+\frac{1}{3}}}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3k^2-3k+1}$