

■ Enunciado

Sea un triángulo ABC. En cada vértice prolongamos los dos lados que en él convergen multiplicando su longitud por un mismo factor k. Así, en A prolongamos el lado BA hasta un punto P tal que $BP = kBA$ y el lado CA hasta Q de modo que $CQ = kCA$, etc.

Demostrar que los 6 puntos así obtenidos están sobre una elipse homotética a la ex-elipse de Steiner y calcular dicha razón de homotecia.

■ Solución

Cualquier triángulo es el transformado afín de otro, en particular, del equilátero de vértices $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(0,0)$ y $C(1,0)$.

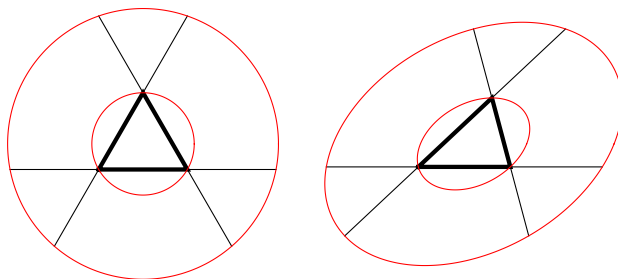
Las elipses de Steiner de tal triángulo son, respectivamente, las circunferencias inscrita (interior) y circunscrita (exterior) que se conservan (en cuanto elipses) en una transformación afín.

Si prolongamos los lados, los 6 puntos del enunciado están sobre otra circunferencia concéntrica.

Estas circunferencias tienen centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$ y como pasan por los puntos $(1,0)$ y

$(k,0)$ sus radios respectivos son $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $R' = \sqrt{\frac{1}{3} - k + k^2}$. La razón de homotecia es

$\sqrt{1 - 3k + 3k^2}$.



En el dibujo vemos la situación para $k=2$. La razón entre las áreas es curiosamente 7.