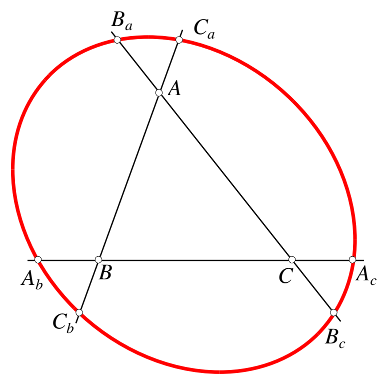
Problema 738 de triánguloscabri. *Sea un triángulo ABC. En cada vértice prolongamos los dos lados que en él convergen multiplicando su longitud por un mismo factor k. Así, en A prolongamos el lado BA hasta un punto P tal que $BP = k \cdot BA$ y el lado CA hasta Q de modo que $CQ = k \cdot CA$, etc. Demostrar que los seis puntos así obtenidos están sobre una elipse homotética a la elipse circunscrita de Steiner y calcular la razón de homotecia.*

Propuesto por César Beade Franco.



Solución de Francisco Javier García Capitán. Siendo, por ejemplo,

$$BC_a : C_aA = BC_a : -AC_a = BC_a : -(BC_a - BA) = k : 1 - k,$$

resulta $C_a = (k : 1 - k : 0)$. De igual forma tenemos:

$$\begin{aligned}
B_a &= (k : 0 : 1 - k),\\
A_b &= (0 : k : 1 - k),\\
C_b &= (1 - k : k : 0),\\
A_c &= (0 : 1 - k : k),\\
B_c &= (1 - k : 0 : k).
\end{aligned}$$

Estos seis puntos están obviamente sobre la cónica

$$\Gamma_k : (xy + yz + zx) - k(1 - k)(x + y + z)^2 = 0,$$

que es homotética a la elipse circunscrita de Steiner $xy + yz + zx = 0$, ya que las dos cónicas tienen la misma intersección con la recta del infinito $x + y + z = 0$.

Es fácil comprobar que el punto $C'_a = (2-3k : -1+3k : 2)$, simétrico de C_a respecto del baricentro $G = (1 : 1 : 1)$ pertenece a la cónica Γ_k, y lo mismo ocurre con los otros cinco puntos, por lo que G es el centro de Γ_k.

Usando la identidad $(1-p)(1, 1, 1)+p(3, 0, 0) = (1+2p, 1-p, 1-p)$, obtenemos que $A' = (1 + 2p : 1 - p : 1 - p)$ es el resultado de aplicar una homotecia de centro G y razón p al punto A.

El punto A' está sobre Γ_k cuando

$$\begin{aligned}
&(1-p)^2 + 2(1+2p)(1-p) - 9k(1-k) = 0\\
\Leftrightarrow &3 - 3p^2 - 9k(1-k) = 0\\
\Leftrightarrow &1 - p^2 - 3k + 3k^2 = 0\\
\Leftrightarrow &p^2 = 3k^2 - 3k + 1,
\end{aligned}$$

por lo que la razón de la homotecia es $\sqrt{3k^2 - 3k + 1}$.