

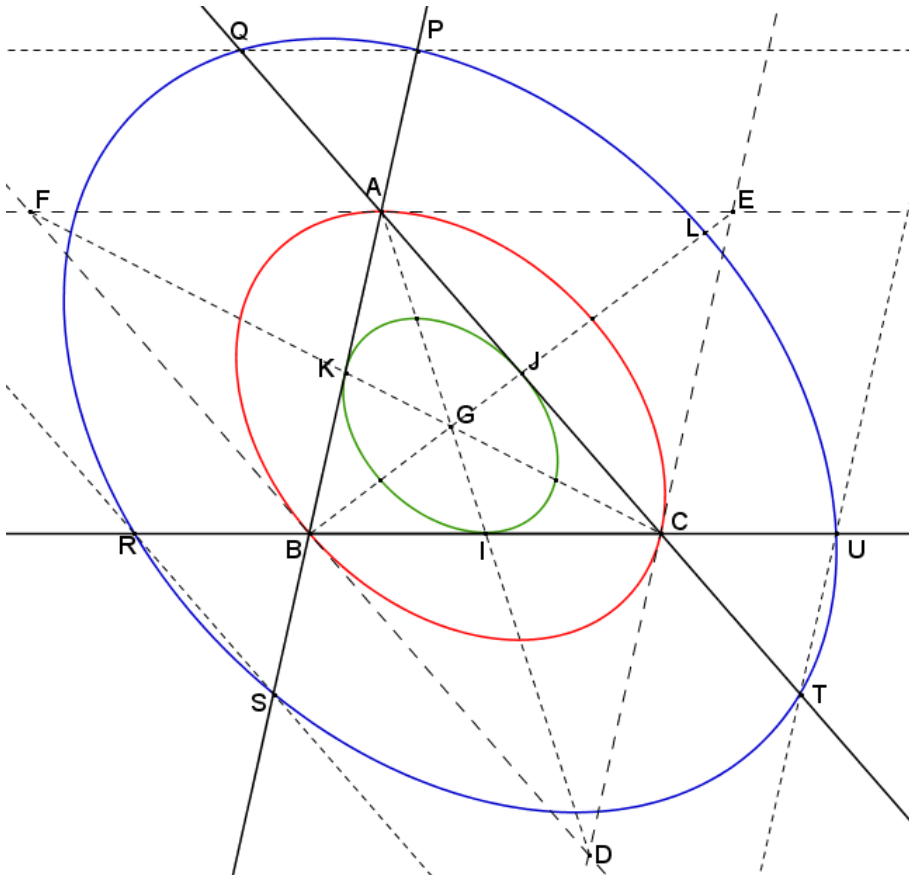
Problema 738

Sea un triángulo ABC. En cada vértice prolongamos los dos lados que en él convergen multiplicando su longitud por un mismo factor k . Así, en A prolongamos el lado BA hasta un punto P tal que $BP = kBA$ y el lado CA hasta Q de modo que $CQ = kCA$, etc.

Demostrar que los 6 puntos así obtenidos están sobre una elipse homotética a la ex-elipse de Steiner y calcular dicha razón de homotecia.

Beade, C. (2015): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Remarques liminaires

Dans un repère cartésien, l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $P(x,y) = Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2Ex + 2Fy + k = 0$ (avec l'un des trois termes A, B ou D, au moins) est une conique du plan.

La transformation qui associe aux coordonnées cartésiennes (x,y) les coordonnées barycentriques (x,y,z) avec $z = 1 - x - y$ donne une équation sous la forme d'un polynôme homogène du second degré $F(x,y,z) = 0$ avec $F(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'zx + 2c'xy = 0$.

D'après <http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/Coniques/CAffines/CAffBary/CAffBary.html>, l'ellipse de Steiner circonscrite au triangle (en rouge) a pour équation $xy + yz + zx = 0$ tandis que l'équation de l'ellipse de Steiner inscrite (en vert) est $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = 0$. Ces deux coniques ont pour centre le centre de gravité G du triangle. Elles sont respectivement tangentes au triangle ABC en les milieux des côtés BC, CA et AB et au triangle DEF obtenu en menant les parallèles à ces côtés passant par les sommets A, B et C. Elles sont homothétiques de centre G et de coefficient 2.

Lemme : toute conique en coordonnées barycentriques de la forme $p(x^2 + y^2 + z^2) - 2q(xy + yz + zx) = 0$ avec p et q nombres réels tels que p ou $q \neq 0$ est homothétique aux deux ellipses de Steiner.

Pour $p = 0$ et $q \neq 0$, on a l'ellipse de Steiner circonscrite et pour $p = 1$ et $q = 1$, on a l'ellipse de Steiner inscrite.

Pour $p \neq 0$, on pose $\lambda = 2q/p$, l'équation de la conique en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$x^2 + y^2 + xy - x - y = -1/(\lambda + 2)$ et quand λ varie, on a une famille d'ellipses homothétiques entre elles qui ont pour centre commun le point de coordonnées $(1/3, 1/3)$ et dont les axes sont parallèles aux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

Soient P,Q,R,S,T,U les points obtenus en prolongeant les côtés BA,CA,CB,AB,AC et BC de sorte que $BP = kBA$, $CQ = kCA$, $CR = kCB$ etc...avec k réel > 1 .

En prenant ABC comme repère barycentrique, les coordonnées des sommets A,B et C sont les suivantes :
 $A : (1,0,0) - B : (0,1,0) - C : (0,0,1)$

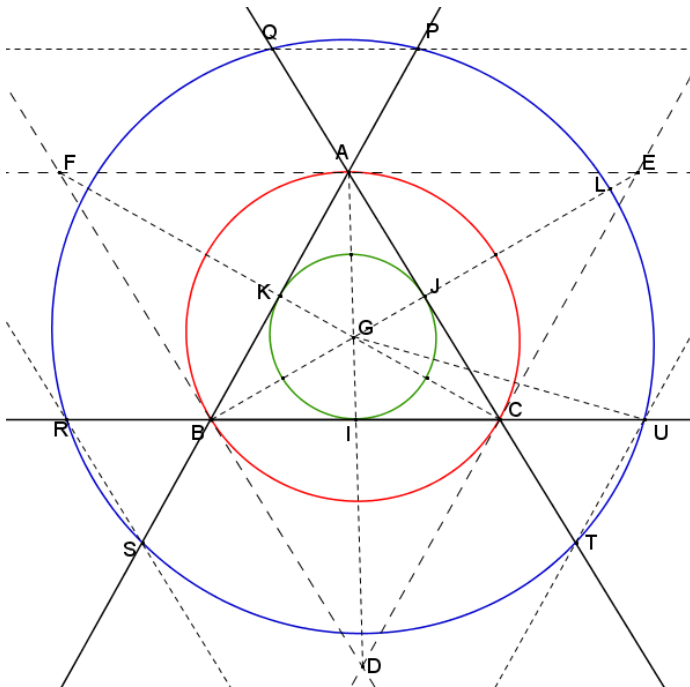
On en déduit celles des six points P,Q,R,S,T et U :

$P : (1 - k, k, 0) - Q : (1 - k, 0, k) - R : (0, 1 - k, k) - S : (k, 1 - k, 0) - T : (k, 0, 1 - k) - U : (0, k, 1 - k)$.

On vérifie qu'en prenant $\lambda = (2k^2 - 2k + 1)/k(1 - k)$, les six points P,Q,R,S,T,U appartiennent à la conique (Γ) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(xy + yz + zx) = 0$. En effet, quelque soit le point considéré, on obtient toujours la relation : $(1 - k)^2 + k^2 - \lambda(1 - k)k = 0$.

C.q.f.d.

Le coefficient d'homothétie qui permet de passer de l'ellipse de Steiner inscrite à la conique (Γ) s'obtient en considérant le cas particulier du triangle ABC équilatéral. Dans ce cas, les ellipses de Steiner deviennent le cercle inscrit et le cercle circonscrit du triangle et la conique (Γ) est un cercle concentrique. Comme tout triangle est l'image d'un triangle équilatéral par une application affine, l'image du cercle inscrit par une telle application est une ellipse qui satisfait les conditions de tangence au milieu de chaque côté et le coefficient d'homothétie α est conservé.



D'après la figure ci-dessous, on a $\alpha = GL/GJ = GU/GI$.

En prenant $BC = 1$, on a $IU = k - 1/2$ et $GI = \sqrt{3}/6$. D'où $GU = \sqrt{(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}}$ et $\alpha = 2\sqrt{3k^2 - 3k + 1}$

Exemple : pour $k = 3/2$ (voir figure supra), $\alpha = \sqrt{13}$