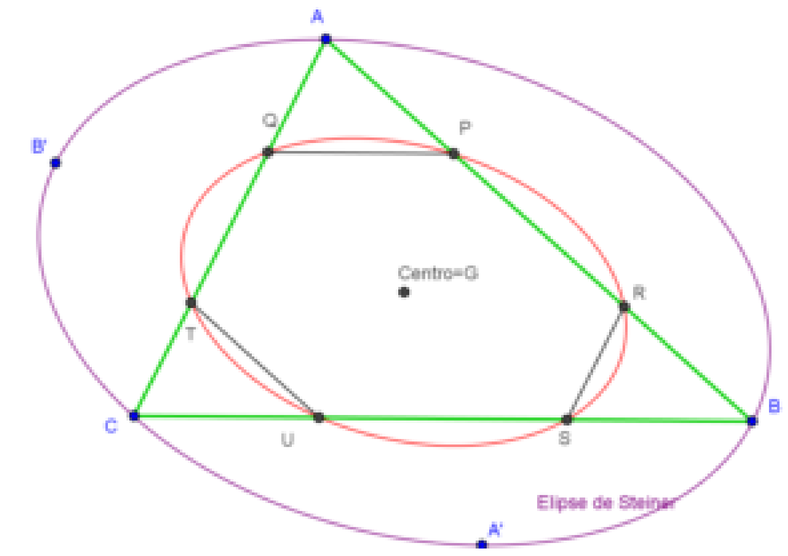
Propuesto por César Beade Franco, I.E.S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

Problema *738.- Sea un triángulo ABC. En cada vértice prolongamos los dos lados que en él convergen multiplicando su longitud por un mismo factor k. Así, en A prolongamos el lado BA hasta un punto P tal que $BP = kBA$ y el lado CA hasta Q de modo que $CQ = kCA$, etc.*

Demostrar que los 6 puntos así obtenidos están sobre una elipse homotética a la ex-elipse de Steiner y calcular dicha razón de homotecia.

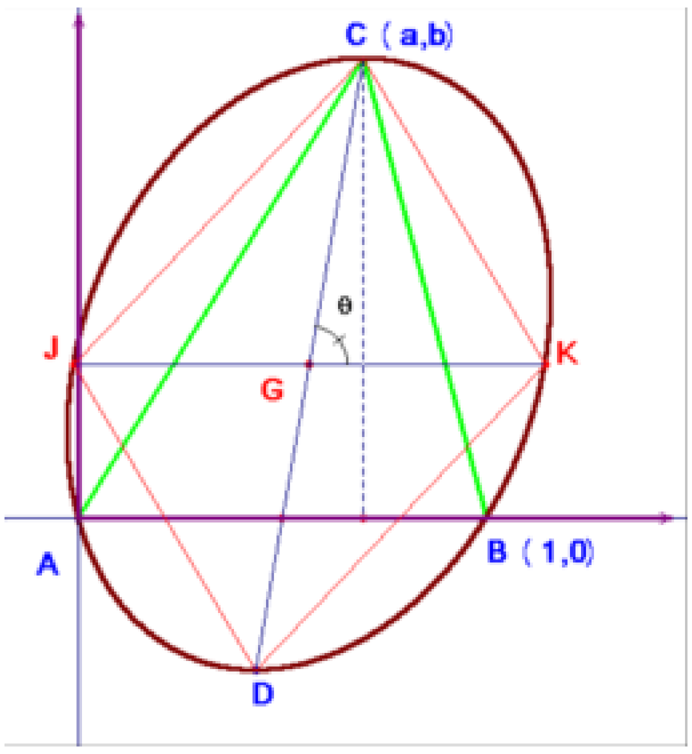
Beade, C. (2015): Comunicación personal

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

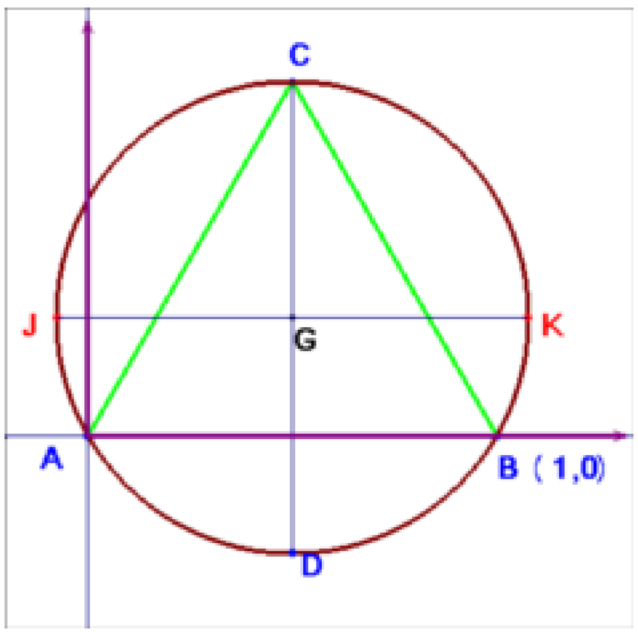


Los puntos P, Q, R, S, T, U son los definidos por $BP = kBA$; $CQ = kCA$; $AR = kAB$; $CS = kCB$; $AT = kAC$; $BU = kBC$, donde hemos supuesto $0 < k < 1$; si fuera $k > 1$ todo sería análogo con los seis puntos en cuestión fuera de los segmentos definidos por los lados (en la figura se ha tomado $k = 0'7$).

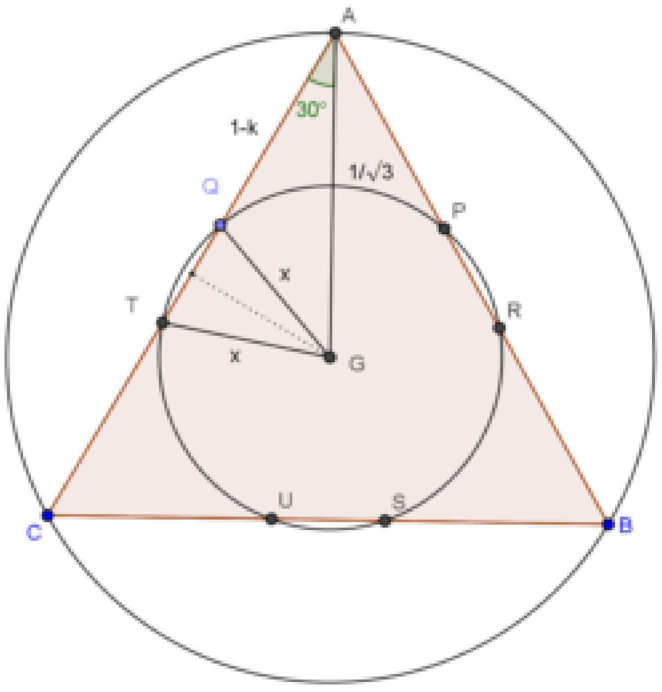
Por la construcción de estos puntos, los triángulos construidos con un vértice de ABC y los dos contiguos más cercanos son semejantes a éste, e iguales entre sí, de ahí que el hexágono $QPRSUTQ$ tenga paralelos sus lados opuestos. El recíproco del teorema de Pascal nos asegura que esos puntos están situados sobre una cónica. Además los puntos medios de PQ y US son de la mediana de A, de donde concluimos que esta mediana es un diámetro; razonando igualmente con QT y RS, podemos concluir que el centro de esa cónica es el baricentro.



En el enlace http://www.edu-xusta.es/math/Las%20elipses%20de%20Steiner%20.html utilizado en la resolución del problema 561 de la primera quincena de mayo de 2010, queda indicado el camino a seguir para la resolución de aquel problema y también para la de éste.



La idea básica del mismo es que la elipse de Steiner circunscrita (respectivamente *inscrita*) se obtiene de la transformación afín de la circunferencia circunscrita (*inscrita*) a un triángulo equilátero.



Como una transformación afín conserva las razones entre longitudes y áreas, la razón de los radios de dos circunferencias centradas en el baricentro de un triángulo equilátero es la razón de semejanza de esas circunferencias y de las elipses homotéticas (de centro el baricentro) en que se transforman por la afinidad.

En la última figura el punto medio de AC es el pie de la altura desde G del triángulo isósceles TGQ. Por tanto $CT = AQ$ y la afinidad transforma la circunferencia de radio x en la elipse de nuestro problema.

Para calcular la razón de semejanza calculamos el radio x. Los puntos A y C tienen igual potencia respecto de la circunferencia de radio $x = GQ$. El radio de la circunscrita, si el lado es 1, es $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$. De la expresión de la potencia tenemos $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - x^2 = (1-k)k$. Se obtiene

$$x^2 = \frac{1}{3} - (1-k)k$$

Y la razón de semejanza $\sqrt{\frac{R^2}{x^2}} = \sqrt{3k^2 - 3k + 1}$ que es lo queríamos calcular. ■