

# Solución al Problema 739

## propuesto en Triángulos Cabri

### quincena del 16 al 30 de junio de 2015

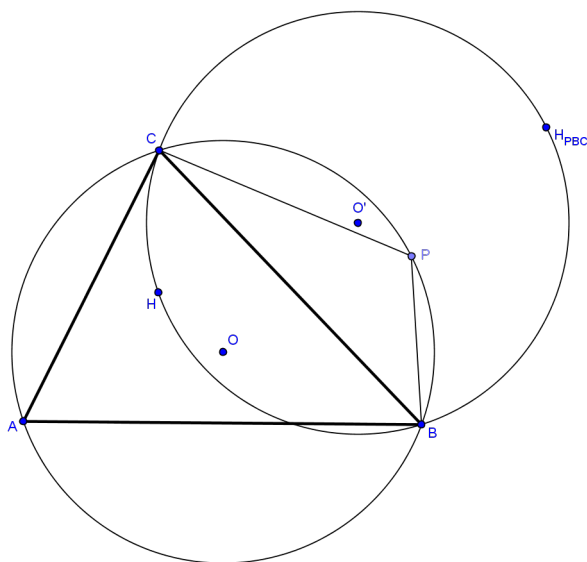
enviada por  
Andrea Fanchini  
Cantù,  
Italia.

junio 18, 2015

**Problema 739.** *Adolfo Soler, Ingeniero de Telecomunicaciones y estudiante de Matemáticas.*

Sea un triángulo  $ABC$ ,  $C$  la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo y  $\sigma$  la reflexión axial de eje la recta  $BC$ . Si suponemos que  $P$  es un punto de la circunferencia  $C$  tal que  $P \neq B$  y  $P \neq C$ , demostrar que los ortocentros de  $ABC$  y de  $PBC$  pertenecen a  $\sigma(C)$ .

**Solución 739.** *(Andrea Fanchini, Cantù, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas el centro  $O'$  de  $\sigma$  simétrico del circuncentro  $O$  respecto al punto medio de  $BC$  tiene coordenadas  $O'(-a^2S_A : S^2 + S_AS_C : S^2 + S_AS_B)$ .

Ahora la ecuación de una circunferencia general es

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)(px + qy + rz) = 0$$

Pero la  $\sigma$  pasa por los vértices  $B$  y  $C$  por tanto será  $q = 0$  y  $r = 0$  además el radio es  $\rho = R = \frac{abc}{2S}$ . Entonces la ecuación de  $\sigma$  será

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z) \left( \frac{c^2y_0^2 + 2S_Ay_0z_0 + b^2z_0^2}{(x_0 + y_0 + z_0)^2} - \rho^2 \right) x = 0$$

donde  $(x_0 : y_0 : z_0)$  son las coordenadas del centro. Sustituyendo, desarrollando y simplificando se tiene que la ecuación de  $\sigma$  es

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - 2(x + y + z)S_Ax = 0$$

Ahora si  $P(u : v : w)$  es un punto de la circunferencia circunscrita se tiene que  $a^2vw + b^2uw + c^2uv = 0$ . Hallamos las coordenadas del ortocentro de  $PBC$  como intersección de las alturas desde  $B$  y  $C$ .

El punto de l'infinito de la recta perpendicular a  $CP$  es  $CP_{\infty\perp}(-a^2v - S_Cu : b^2u + S_Cv : S_Bv - S_Au)$  por tanto la alturas desde  $B$  tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a^2v - S_Cu & b^2u + S_Cv & S_Bv - S_Au \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow BCP_{\infty\perp} \equiv (S_Bv - S_Au)x + (a^2v + S_Cu)z = 0$$

El punto de l'infinito de la recta perpendicular a  $BP$  es  $BP_{\infty\perp}(a^2w + S_Bu : S_Au - S_Cw : -c^2u - S_Bw)$

por tanto la alturas desde  $C$  tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2w + S_Bu & S_Au - S_Cw & -c^2u - S_Bw \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow CBP_{\infty\perp} \equiv (S_Cw - S_Au)x + (a^2w + S_Bu)y = 0$$

Así, siendo que  $a^2vw + b^2uw + c^2uv = 0$ , el ortocentro de  $PBC$  es

$$H_{PBC} = BP_{\infty\perp} \cap CBP_{\infty\perp} = (S^2u - a^2S_A(u+v+w) : S^2v + S_AS_C(u+v+w) : S^2w + S_AS_B(u+v+w))$$

Sus coordenadas tienen que satisfacer la ecuación de  $\sigma : a^2yz + b^2zx + c^2xy - 2(x+y+z)S_Ax = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} & a^2(S^2v + S_AS_C(u+v+w))(S^2w + S_AS_B(u+v+w)) + b^2(S^2w + S_AS_B(u+v+w))(S^2u - a^2S_A(u+v+w)) + \\ & + c^2(S^2u - a^2S_A(u+v+w))(S^2v + S_AS_C(u+v+w)) - 2S_AS^2(u+v+w)(S_BS_Cu - a^2S_Av - a^2S_Aw) = \\ & = (S_AS^2(u+v+w))(-a^2S_A(u+v+w) + (b^2S_B + c^2S_C)u - a^2S_Av - a^2S_Aw - 2S_BS_Cu + 2a^2S_Av + 2a^2S_Aw) = 0 \end{aligned}$$

por tanto el ortocentro de  $PBC$  pertenece a  $\sigma(C)$ .

Por el ortocentro  $H(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$  de  $ABC$  la verificación es inmediata

$$a^2S_A^2S_BS_C + b^2S_AS_B^2S_C + c^2S_AS_BS_C^2 - 2S_AS_BS_CS^2 = S_AS_BS_C(a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C - 2S^2) = 0, \quad q.e.d.$$