
Pr. Cabri 739

Propuesto por Adolfo Soler, Ingeniero de Telecomunicaciones y estudiante de Matemáticas

Solución de César Beade Franco

■ Enunciado

Sea un triángulo ABC , α la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo y σ la reflexión axial de eje la recta BC .

Si suponemos que P es un punto de la circunferencia C tal que $P \neq B$ y $P \neq C$, demostrar que los ortocentros de ABC y de PBC pertenecen a $\sigma(\alpha)$.

■ Solución

Llamemos H y H' a los ortocentros de ABC y PBC respectivamente. H' pertenece siempre a la simétrica respecto a cualquier lado de la circunscrita a ABC (1).

Sea β la circunscrita a $H'BC$. P es el ortocentro de $H'BC$ (2), que estará situado en la circunferencia simétrica de β respecto a BC . Además $P \in \alpha$. Así que $\alpha = \sigma(\beta) \iff \beta = \sigma(\alpha)$. Y H' está sobre $\sigma(\alpha)$, lo mismo que H .

■ Notas

(1) Ver "Retorno a la Geometría", pg. 37, de Coxeter y Greitzer.

(2) Se sabe que si Q es el ortocentro de PBC , entonces P lo es de QBC . De hecho los 4 triángulos de vértices A, B, C, H (ortocentro de ABC) tienen como ortocentro el cuarto vértice.