

Problema 739

Siga un triangle $\triangle ABC$, Siga C_1 la circumferència circumscrita al triangle i σ la reflexió axial d'eix la recta BC .

Siga un punt P que pertany a la circumferència C_1 tal que $P \neq B$ i $P \neq C$. Demostreu que els ortocentres dels triangles $\triangle ABC$ i $\triangle PBC$ pertanyen a $\sigma(C_1)$.

Solució de Ricard Peiró.

Suposem A agut.

Siga H l'ortocentre del triangle $\triangle ABC$.

$$\angle BHC = 180^\circ - A.$$

La circumferència $\sigma(C_1)$ queda dividida per la recta BC amb dos arcs de mesures A , $180^\circ - A$.

Aleshores, H pertany a l'arc capaç de la circumferència $\sigma(C_1)$ de $180^\circ - A$ sobre el segment $\overline{BC}$.

Siga P un punt de la circumferència C_1 .

Suposem que P pertany a l'arc $\widehat{BAC}$

$$\angle BPC = A.$$

Siga K l'ortocentre del triangle $\triangle PBC$.

$$\angle BKC = 180^\circ - A.$$

Aleshores, K pertany a l'arc capaç de la circumferència $\sigma(C_1)$ de $180^\circ - A$ sobre el segment $\overline{BC}$.

Suposem que P no pertany a l'arc $\widehat{BAC}$

$$\angle BPC = 180^\circ - A.$$

$$\angle BKC = A.$$

Aleshores, K pertany a l'arc capaç de la circumferència $\sigma(C_1)$ d'angle A sobre el segment $\overline{BC}$.

Si A no és agut la demostració és anàloga.

