

Problema 739

Sea un triángulo $\triangle ABC$, C_1 la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo y σ la reflexión axial de eje la recta BC .

Si suponemos que P es un punto de la circunferencia C tal que $P \neq B$ y $P \neq C$, demostrar

que los ortocentros de $\triangle ABC$ y de $\triangle PBC$ pertenecen a $\sigma(C_1)$

Soler, A. (2015): Comunicación personal.

Solución de Ricard Peiró.

Supongamos A agudo.

Sea H el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$.

$$\angle BHC = 180^\circ - A.$$

La circunferencia $\sigma(C_1)$ queda dividida por la recta BC en dos arcos de medidas A , $180^\circ - A$.

Entonces, H pertenece al arco capaz de la circunferencia $\sigma(C_1)$ de $180^\circ - A$ sobre el segmento $\overline{BC}$.

Sea P un punto de la circunferencia C_1 .

Supongamos que P pertenece al arco $\widehat{BAC}$

$$\angle BPC = A.$$

Sea K el ortocentro del triángulo $\triangle PBC$.

$$\angle BKC = 180^\circ - A.$$

Entonces, K pertenece al arco capaz de la circunferencia $\sigma(C_1)$ de $180^\circ - A$ sobre el segmento $\overline{BC}$.

Supongamos que P no pertenece al arco $\widehat{BAC}$

$$\angle BPC = 180^\circ - A.$$

$$\angle BKC = A.$$

Entonces, K pertenece al arco capaz de la circunferencia $\sigma(C_1)$ de ángulo A sobre el segmento $\overline{BC}$.

Si A no es agudo la demostración es análoga.

