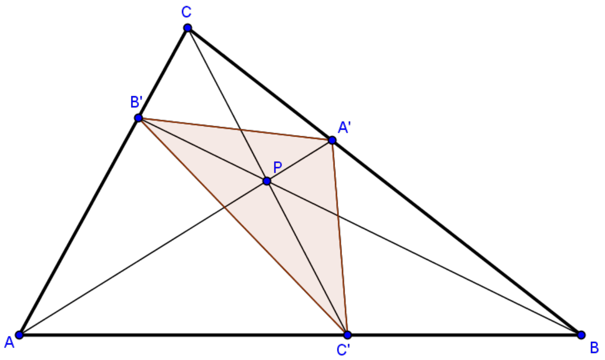
Solución al Problema 740
propuesto en Triángulos Cabri
Edición veraniega del 1 de julio al 31 de agosto de 2015

enviada por
Andrea Fanchini
Cantù,
Italia.

julio 2, 2015

Problema 740. *César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.*
Sea un triángulo ABC de área S y P un punto interior del mismo. Construímos el triángulo $A'B'C'$ siendo $A' = BC \cap AP$, $B' = AC \cap BP$ y $C' = AB \cap CP$ y área S'. Siempre se verifica que $S'/S <= 1/4$.

Solución 740. *(Andrea Fanchini, Cantù, Italia)*



Si ponemos $\delta = \frac{BA'}{A'C}$, $\epsilon = \frac{CB'}{B'A}$ y $\phi = \frac{AC'}{C'B}$, ahora por Ceva es $\delta\epsilon\phi = 1$.

Usando coordenadas baricéntricas los puntos A', B' y C' tienen coordenadas absolutas

$$A'\left(0, \frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right), \quad B'\left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}, 0, \frac{1}{1+\epsilon}\right), \quad C'\left(\frac{1}{1+\phi}, \frac{\phi}{1+\phi}, 0\right)$$

por tanto tenemos que

$$[A'B'C'] = [ABC]\frac{1}{(1+\delta)(1+\epsilon)(1+\phi)}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \delta \\ \epsilon & 0 & 1 \\ 1 & \phi & 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{[A'B'C']}{[ABC]} = \frac{1+\delta\epsilon\phi}{(1+\delta)(1+\epsilon)(1+\phi)} = \frac{2}{(1+\delta)(1+\epsilon)(1+\phi)}$$

Por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, tenemos que

$$1+\delta \geq 2\sqrt{\delta}, \quad 1+\epsilon \geq 2\sqrt{\epsilon}, \quad 1+\phi \geq 2\sqrt{\phi}$$

entonces

$$(1+\delta)(1+\epsilon)(1+\phi) \geq 8\sqrt{\delta\epsilon\phi} \geq 8$$

por tanto

$$\frac{[A'B'C']}{[ABC]} \leq \frac{1}{4}, \quad q.e.d.$$

la igualdad se tiene por $\delta = \epsilon = \phi = 1$, es decir cuando el punto P es el baricentro.