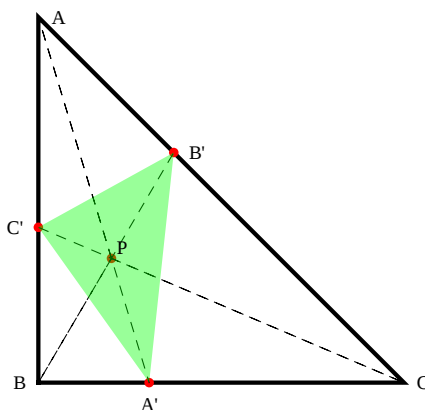

Pr. Cabri 740**Propuesto por César Beade Franco****Solución de César Beade Franco****■ Enunciado**

Sea un triángulo ABC de área S y P un punto interior del mismo. Construimos el triángulo A' B' C' siendo $A' = BC \cap AP$, $B' = AC \cap BP$ y $C' = AB \cap CP$ y área S'. Siempre se verifica que $S'/S \leq 1/4$.

■ Solución

Cualquier triángulo es el transformado afín de otro, en particular, del rectángulo con vértices A(0,1), B(0,0) y C(1,0).



Definimos $\frac{BA'}{A'C} = \alpha$, $\frac{CB'}{B'A} = \beta$, $\frac{AC'}{C'B} = \gamma$ (ver dibujo). Si tomamos como ABC el triángulo anterior resulta que $A' = (\frac{\alpha}{1+\alpha}, 0)$, $B' = (\frac{1}{1+\beta}, \frac{\beta}{1+\beta})$ y $C' = (0, \frac{1}{1+\gamma})$. Y aplicando el teorema de Ceva se cumple que $\alpha \beta \gamma = 1$

El área de ABC es $\frac{1}{2}$ y la de $\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{1+\alpha} & 0 & 1 \\ \frac{1}{1+\beta} & \frac{\beta}{1+\beta} & 1 \\ 0 & \frac{1}{1+\gamma} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1+\alpha \beta \gamma}{2(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)} = \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}$, pues

$\alpha \beta \gamma = 1$.

Como el área de ABC es $\Delta = \frac{1}{2}$, para demostrar que el cociente de áreas $\frac{\Delta'}{\Delta} \leq \frac{1}{4}$, bastaría probar que $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) \geq 8$.

$$K = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta\gamma$$

y como $\alpha\beta\gamma = 1 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{\gamma}$, etc., reagrupando términos, obtenemos

$$K = 1 + (\alpha + \frac{1}{\alpha}) + (\beta + \frac{1}{\beta}) + (\gamma + \frac{1}{\gamma}) + \alpha\beta\gamma \geq 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8,$$

pues para $x > 0$, la expresión $x + \frac{1}{x}$ toma valor mínimo 2 (en $x=1$).

La igualdad $\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{1}{4}$ se daría si $\alpha=\beta=\gamma=1$ (triángulo medial).

■ Nota

La anterior desigualdad se puede generalizar.

Si $x_1 x_2 x_3 \dots = 1$, entonces $P = (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\dots \leq 2^n$, siendo n el número de factores.

Para demostrarlo consideremos primero dos números x , y tales que $xy=k$. El producto $(1+x)(1+y) = (1+x)(1+\frac{k}{x})$ es mínimo cuando $x=y=\sqrt{k}$.

Cuando hay más factores, si hay dos distintos, x_i , x_j , siempre podrán sustituirse por dos iguales, con su mismo producto, que reducen el valor de P .