

Problema 740.-

Sea un triángulo ABC de área S y P un punto interior del mismo.

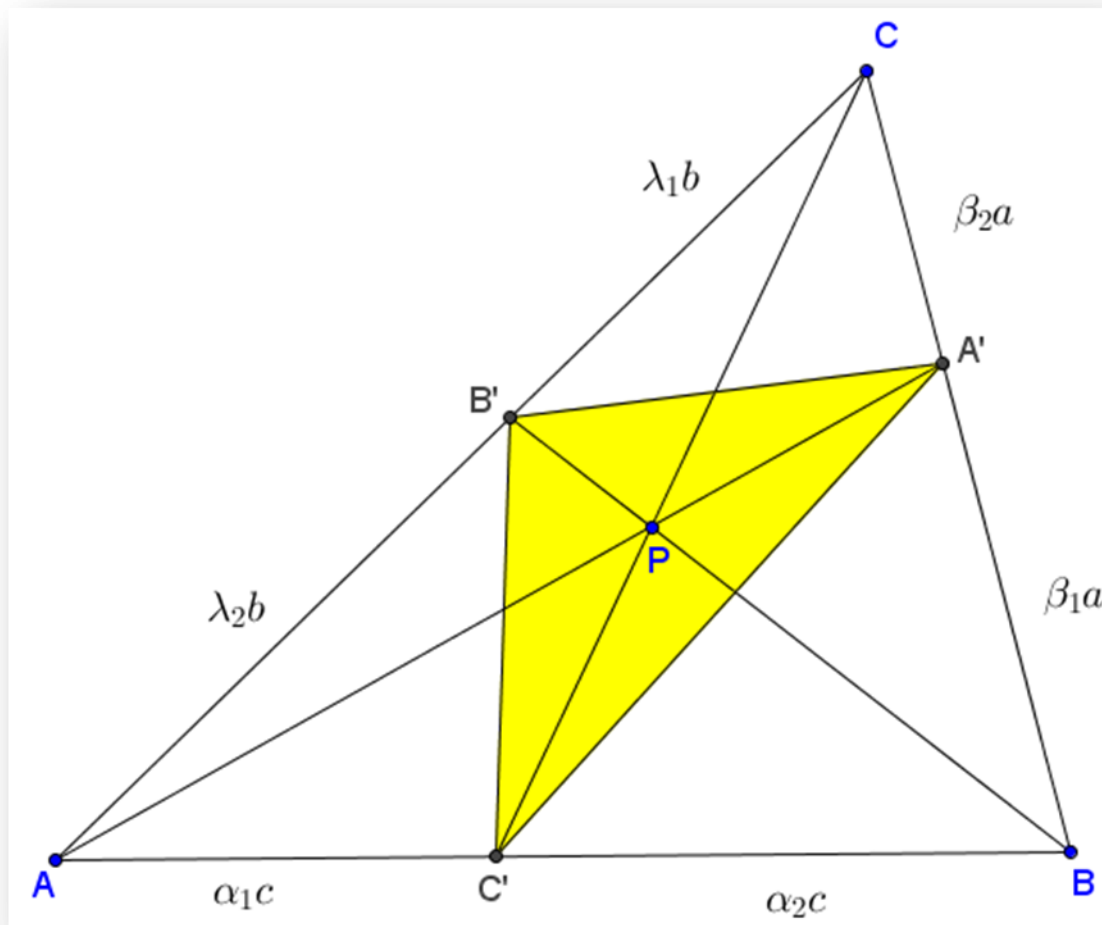
Construimos el triángulo A'B'C' siendo $A' = BC \cap AP$, $B' = AC \cap BP$ y $C' = AB \cap CP$ y área S_1 .

Siempre se verifica que $S_1 \leq \frac{1}{4} \cdot S$

Beade C. (2015): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Construimos a partir del triángulo inicial ABC y un punto interior P, el triángulo A'B'C', determinando así las cevianas AA', BB' y CC', respectivamente.



Convenimos en notar

$$AC' = \alpha_1 c; C'B = \alpha_2 c \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$BA' = \beta_1 a; A'C = \beta_2 a \rightarrow \beta_1 + \beta_2 = 1$$

$$CB' = \lambda_1 b; B'A = \lambda_2 b \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

El valor del área, $S_1 = [A'B'C']$ la relacionaremos con el área S del triángulo inicial ABC.

$$S_1 = [A'B'C'] = S - [AB'C'] - [BC'A'] - [CA'B']$$

Ahora bien, el valor de las áreas de estos triángulos podrá ser expresado del modo:

$$[AB'C'] = \frac{1}{2} \alpha_1 c \cdot \lambda_2 b \cdot \sin A = \alpha_1 \lambda_2 \cdot S$$

$$[BC'A'] = \frac{1}{2} \alpha_2 c \cdot \beta_1 a \cdot \sin B = \alpha_2 \beta_1 \cdot S$$

$$[CB'A'] = \frac{1}{2} \beta_2 a \cdot \lambda_1 b \cdot \sin C = \beta_2 \lambda_1 \cdot S$$

En consecuencia,

$$S_1 = [A'B'C'] = S - \alpha_1 \lambda_2 \cdot S - \alpha_2 \beta_1 \cdot S - \beta_2 \lambda_1 \cdot S$$

$$S_1 = [A'B'C'] = S \cdot (1 - \alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \beta_1 - \beta_2 \lambda_1)$$

Si convenimos en notar las razones

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \alpha; \quad \frac{\beta_1}{\beta_2} = \beta; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda;$$

Entonces se verificará que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \rightarrow \alpha + 1 = \frac{1}{\alpha_2}$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 1 \rightarrow \beta + 1 = \frac{1}{\beta_2}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \rightarrow \lambda + 1 = \frac{1}{\lambda_2}$$

Por concurrir las tres cevianas en el punto P, se verificará por el Teorema de Ceva que:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 \rightarrow \alpha \beta \lambda = 1$$

La anterior expresión de áreas ahora la podemos reescribir del modo:

$$S_1 = [A'B'C'] = S \cdot (1 - \alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \beta_1 - \beta_2 \lambda_1)$$

$$S_1 = [A'B'C'] = S \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+\lambda)} - \frac{\beta}{(1+\beta)(1+\alpha)} - \frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\beta)} \right)$$

Y desarrollando las operaciones llegamos a la expresión:

$$S_1 = S \cdot \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \lambda + 1}{(\alpha + 1)(\beta + 1)(\lambda + 1)}$$

Como quiera que

$$\alpha \cdot \beta \cdot \lambda = 1$$

$$S_1 = S \cdot \frac{2}{(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\lambda + 1)}$$

En estos triángulos, se verifica la igualdad siguiente:

$$(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\lambda + 1) = \alpha\beta\lambda + \alpha\beta + \alpha\lambda + \beta\lambda + \alpha + \beta + \lambda + 1;$$

$$(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\lambda + 1) = 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} + \alpha + \beta + \lambda + 1;$$

$$(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\lambda + 1) = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + 2$$

En virtud de la desigualdad aritmética-geométrica, tendremos que:

$$\frac{\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \frac{1}{\beta} + \lambda + \frac{1}{\lambda}}{6} \geq \sqrt[6]{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \beta \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = 1$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \frac{1}{\beta} + \lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 6$$

$$(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\lambda + 1) = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + 2 \geq 8$$

Se dará la igualdad si y sólo cuando todos los términos coincidan, es decir:

$$\alpha = \frac{1}{\alpha} = \beta = \frac{1}{\beta} = \lambda = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \lambda = 1$$

Así el triángulo de área máxima se obtendrá cuando las tres cevianas sean las *medianas* y el punto P, sea el *Baricentro G* del triángulo inicial.

El valor de su área, como se sabe entonces, será igual a $S_1 = \frac{1}{4} \cdot S$

En los demás casos, siempre se verificará que $S_1 \leq \frac{1}{4} \cdot S$ cqd ■