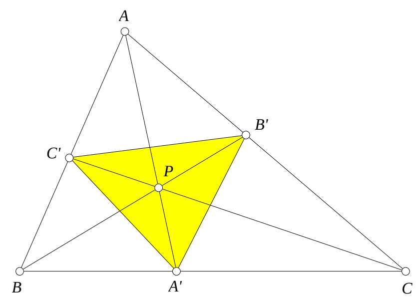
Problema 740. Sea un triángulo ABC de área S y P un punto interior del mismo. Construímos el triángulo $A'B'C'$ siendo $A' = BC \cap AP$, $B' = AC \cap BP$ y $C' = AB \cap CP$ y área S'. Siempre se verifica que $\frac{S}{S'} \leq \frac{1}{4}$.

Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña

Prima soluzione (Ercole Suppa) Usiamo le notazioni usuali della geometria del triangolo: $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, etc.



Posto $x = BA'/A'C$, $y = CB'/B'A$, $z = AC'/C'B$ abbiamo

$$BA' = \frac{ax}{x+1} \qquad , \qquad A'C = \frac{a}{x+1}$$

ed analogamente $CB' = \frac{by}{y+1}$, $B'A = \frac{b}{y+1}$, $AC' = \frac{cz}{z+1}$, $C'B = \frac{c}{z+1}$.

Pertanto, tenendo conto che $S = \frac{1}{2}bc \sin A$, abbiamo

$$[AC'B'] = \frac{1}{2} \cdot AC' \cdot AB' \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{cz}{z+1} \cdot \frac{b}{y+1} \cdot \sin A = \frac{z}{(y+1)(z+1)} \cdot S \quad (1)$$

ed analogamente si ottiene che

$$[BA'C'] = \frac{x}{(x+1)(z+1)} \cdot S \qquad , \qquad [CB'A'D] = \frac{y}{(x+1)(y+1)} \cdot S \qquad (2)$$

Da (1) e (2) discende che

$$S' = [A'B'C'] = [ABC] - [AC'B'] - [BA'C'] - [CB'A'] \quad \Leftrightarrow$$
$$S' = S - \frac{x}{(x+1)(z+1)} \cdot S - \frac{x}{(x+1)(z+1)} \cdot S - \frac{y}{(x+1)(y+1)} \cdot S \quad \Leftrightarrow$$
$$S' = \frac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)} \cdot S \qquad (3)$$

Osserviamo che, in virtù del teorema di Ceva, $xyz = 1$ ed inoltre

$$(x+1)(y+1)(z+1) \geq 2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{y} \cdot 2\sqrt{z} = 8\sqrt{xyz} \qquad (4)$$

in quanto, per la disuguaglianza tra la media aritmetica e la media geometrica, risulta che $x+1 \geq 2\sqrt{x}$, $y+1 \geq 2\sqrt{y}$, $z+1 \geq 2\sqrt{z}$.

Dalle (3),(4) discende che

$$\frac{S'}{S} = \frac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)} = \frac{1+xyz}{(x+1)(y+1)(z+1)} \leq \frac{1+xyz}{8\sqrt{xyz}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$\square$

Seconda soluzione Se $P(x:y:z)$ sono le coordinate baricentriche omogenee del punto P è noto che l'area del triangolo ceviano di P è espressa dalla formula

$$[A'B'C'] = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \cdot [ABC] \tag{1}$$

Dalla disuguaglianza tra la media aritmetica e la media geometrica abbiamo

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} \quad , \quad y+z \geq 2\sqrt{yz} \quad , \quad z+x \geq 2\sqrt{zx} \quad \Rightarrow$$
$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8\sqrt{x^2y^2z^2} = 8xyz \tag{2}$$

La disuguaglianza richiesta segue direttamente dalle relazioni (1) e (2)

$$\frac{S'}{S} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{2xyz}{8xyz} = \frac{1}{4}$$

$\square$