

Problema 740

Sea un triángulo $\triangle ABC$ e área S y sea P un punto interior del mismo.

Construimos el triángulo $\triangle A'B'C'$ siendo $A' = BC \cap AP$, $B' = AC \cap BP$, $C' = AB \cap CP$ y área S' .

Probar que $\frac{S'}{S} \leq \frac{1}{4}$.

Solución de Ricard Peiró.

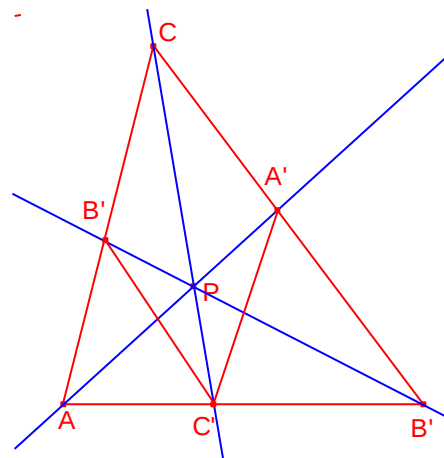
Las rectas AA' , BB' , CC' son cevianas del triángulo.

Sea $r = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}$, entonces, $\overline{AC'} = \frac{r}{1+r}c$, $\overline{C'B} = \frac{1}{1+r}c$.

$s = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}$, entonces, $\overline{BA'} = \frac{s}{1+s}a$, $\overline{A'C} = \frac{1}{1+s}a$.

$t = \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}$, entonces, $\overline{CB'} = \frac{t}{1+t}b$, $\overline{B'A} = \frac{1}{1+t}b$.

Aplicando el teorema de Ceva: $rst = 1$.



Dos triángulos que tienen la misma altura las áreas son proporcionales a las bases:

$\frac{S_{AC'C}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{AC'}}{c} = \frac{r}{1+r}$, $\frac{S_{AC'B'}}{S_{ACC}} = \frac{\overline{B'A}}{b} = \frac{1}{1+t}$. Multiplicando las dos expresiones:

$$S_{AC'B'} = \frac{1}{1+t} \frac{r}{1+r} S_{ABC}.$$

$$\text{Análogamente: } S_{C'BA'} = \frac{1}{1+r} \frac{s}{1+s} S_{ABC}, \quad S_{CA'B'} = \frac{1}{1+s} \frac{t}{1+t} S_{ABC}.$$

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} - (S_{AC'B'} + S_{C'BA'} + S_{CA'B'}).$$

$$S_{A'B'C'} = \left(1 - \left(\frac{r}{(1+t)(1+r)} + \frac{s}{(1+r)(1+s)} + \frac{t}{(1+s)(1+t)} \right) \right) S_{ABC}.$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = 1 - \left(\frac{r}{(1+t)(1+r)} + \frac{s}{(1+r)(1+s)} + \frac{t}{(1+s)(1+t)} \right)$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{1+rst}{(1+r)(1+s)(1+t)}$$

Aplicando el teorema de Ceva:

$$\frac{S'}{S} = \frac{2}{(1+r)(1+s) \left(1 + \frac{1}{rs} \right)}.$$

$$(1+r)(1+s) \left(1 + \frac{1}{rs} \right) = 2 + r + \frac{1}{r} + s + \frac{1}{s} + rs + \frac{1}{rs}.$$

Si $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ la igualdad se alcanza cuando $x = 1$.

Entonces, $(1+r)(1+s) \left(1 + \frac{1}{rs} \right) \geq 8$. La igualdad se alcanza cuando $r = s = 1$.

Por tanto, $\frac{S'}{S} = \frac{2}{(1+r)(1+s) \left(1 + \frac{1}{rs} \right)} \leq \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. La igualdad se alcanza cuando A' , B' , C'

son los puntos medios de los lados. P el baricentro