

Problema 740

Sea un triángulo ABC de área S y P un punto interior del mismo. Construimos el triángulo A'B'C' siendo $A'B' = BC$, $B'C' = AC$ y $C'A' = AB$ y área S'. Siempre se verifica que $S'/S \leq 1/4$.

Beade C. (2015): Comunicación personal

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

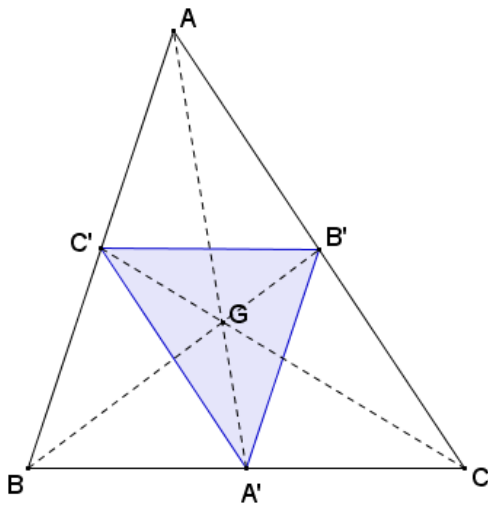


figure n°1

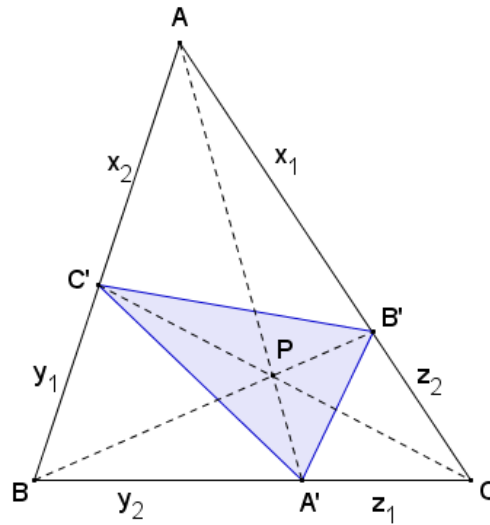


figure n°2

Soient S et S' les aires respectives des triangles ABC et A'B'C'.

Quand le point P est confondu avec le centre de gravité G du triangle ABC (voir figure n°1), on a trivialement $S' = S/4$

Quand le point P est distinct de G (voir figure n°2), nous allons démontrer que $S' < S/4$

On note les longueurs des segments suivants :

$a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $x_1 = AB'$, $x_2 = AC'$, $y_1 = BA'$, $y_2 = BC'$, $z_1 = CA'$ et $z_2 = CB'$

avec $a = y_2 + z_1$, $b = z_2 + x_1$ et $c = x_2 + y_1$.

Lemme n°1 : les aires des triangles $AB'C'$, $BC'A'$ et $CA'B'$ s'expriment en fonction de S et des longueurs des côtés selon les formules :

$\text{aire}(AB'C') = Sx_1x_2/bc$, $\text{aire}(BC'A') = Sy_1y_2/ca$ et $\text{aire}(CA'B') = Sz_1z_2/ab$

Démonstration :

$\text{aire}(AB'C') = AB' \cdot AC' \cdot \sin(\angle B'AC') = x_1x_2 \cdot \sin(\angle BAC)$ et $S = \text{aire}(ABC) = bc \cdot \sin(\angle BAC)$. Cqfd

Lemme n°2 : d'après le théorème de Ceva, les trois céviennes AA' , BB' et CC' du triangle ABC sont telles que $x_1y_1z_1 = x_2y_2z_2 = p$. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Ceva

$S' = S - [\text{aire}(AB'C') + \text{aire}(BC'A') + \text{aire}(CA'B')]$

Donc $S' < S/4 \Leftrightarrow 4[\text{aire}(AB'C') + \text{aire}(BC'A') + \text{aire}(CA'B')] > 3S$,

ce qui revient à démontrer d'après le lemme n°1 :

$4[(y_2+z_1)x_1x_2 + (z_2+x_1)y_1y_2 + (x_2+y_1)z_1z_2] > 3(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)$

qui s'écrit encore :

$(y_1z_1 - x_2y_2)(z_2 - x_1) + (z_1x_1 - y_2z_2)(x_2 - y_1) + (x_1y_1 - z_2y_2)(y_2 - z_1) > 0$

Or d'après le lemme n°2, on a $y_1z_1 - x_2y_2 = (1/x_1 - 1/z_2)p = p(z_2 - x_1)/x_1z_2$ etc...

Il en résulte que $(y_1z_1 - x_2y_2)(z_2 - x_1) + (z_1x_1 - y_2z_2)(x_2 - y_1) + (x_1y_1 - z_2y_2)(y_2 - z_1)$ est égal à :

$p[(z_2 - x_1)^2/x_1z_2 + (x_2 - y_1)^2/y_1x_2 + (y_2 - z_1)^2/z_1y_2]$

Les trois termes $(z_2 - x_1)^2/x_1z_2$, $(x_2 - y_1)^2/y_1x_2$ et $(y_2 - z_1)^2/z_1y_2$ sont ≥ 0 et lorsque P est distinct de G, au moins l'un d'eux est > 0 . Cqfd.