

Problema 749

Sobre un ángulo de 60° (III)

Sea ABC un triángulo con $AB < AC$

Sean O el circuncentro e I el incentro.

Sean A_1 , B_1 , C_1 los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con BC, AC y AB.

La bisectriz de $\angle B_1 A_1 C_1$ es perpendicular a OI si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

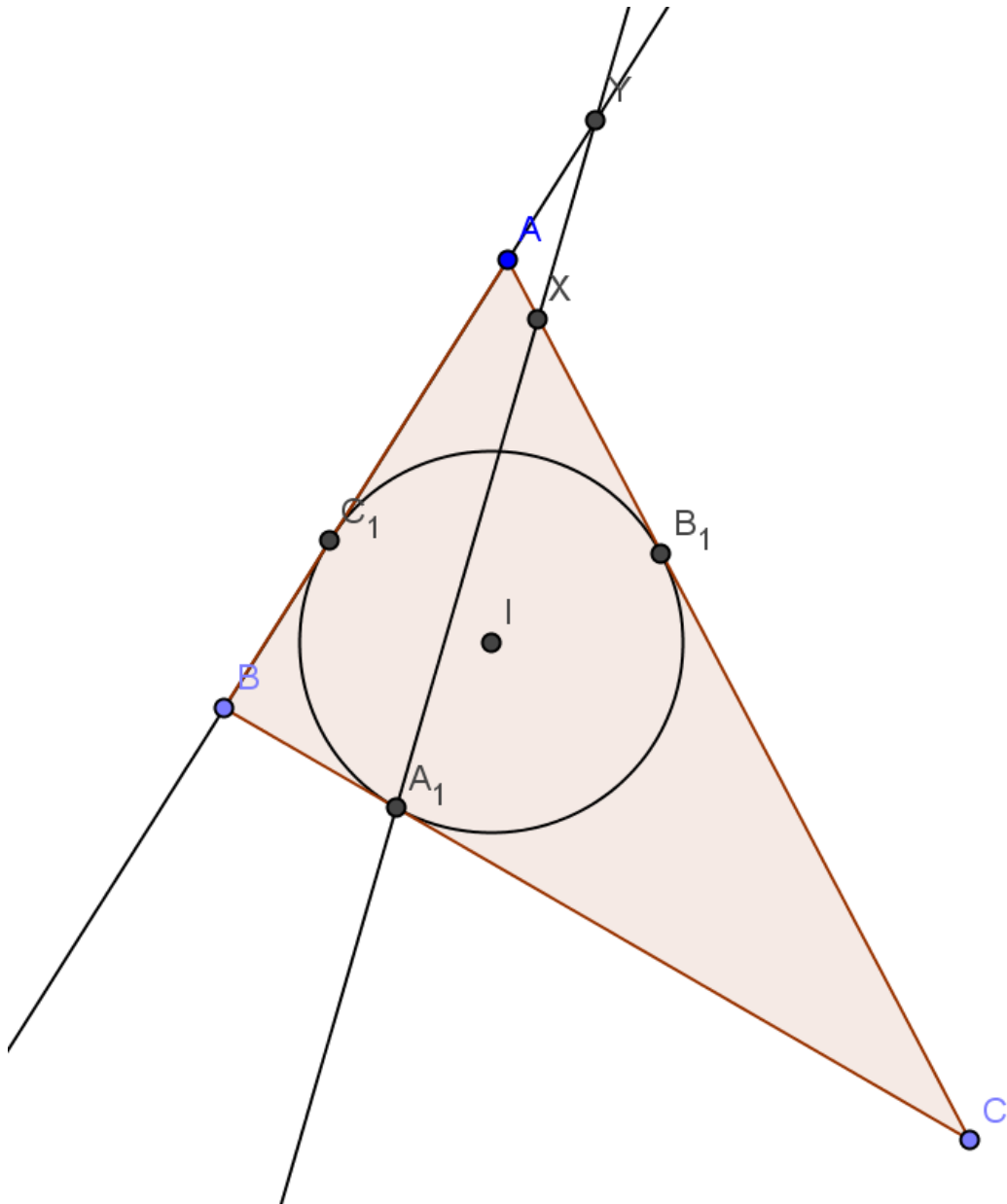
Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución del director

Sea ABC con $\angle A = 60^\circ$.

Se conoce que $BC_1 = BA_1$ y que $CA_1 = CB_1$ por las tangencias correspondientes.

Así, si el triángulo ABC es 60° , β , $120^\circ - \beta$, $\angle C_1 A_1 B = 90^\circ - (\beta/2)$, $\angle B_1 A_1 C = 30^\circ + (\beta/2)$, por lo que $\angle C_1 A_1 B_1 = 60^\circ$.

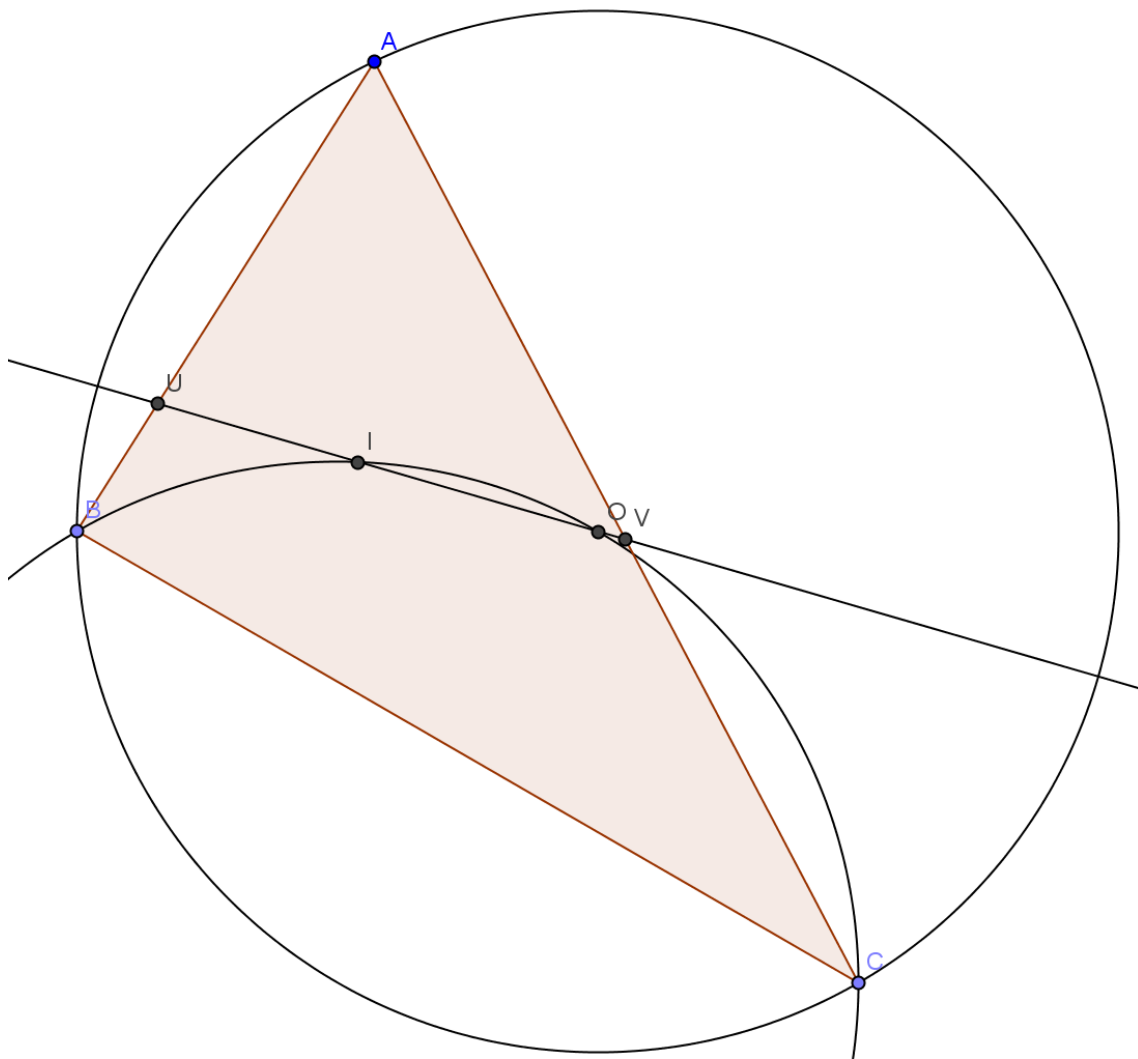


Si A_1X , con X sobre AC es la bisectriz $\angle XA_1B = 120^\circ - (\beta/2)$.

Si A_1Y , con Y sobre AB es la bisectriz, $\angle YA_1C = 60^\circ + (\beta/2)$.

Así $\angle A_1XC = \beta/2$. $\angle AYA_1 = 60^\circ - (\beta/2)$ [1]

Por otra parte $\angle BIC = 120^\circ$, $\angle BOC = 120^\circ$, con lo que $AIOC$ son concíclicos.



Sean U y V las intersecciones de AB y AC con la recta OI.

$\angle OIC = \angle OBC = 30^\circ$, $\angle BIC = 120^\circ$, $\angle UIC = 30^\circ$, $\angle IBU = \beta/2$, luego $\angle BUI = 150^\circ - (\beta/2)$.

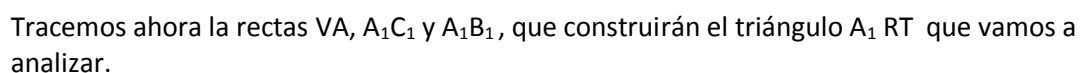
$\angle AUV = 30^\circ + \beta/2$ [2]. De donde considerando [1] y [2], se deduce lo pedido.

Sea la implicación inversa.

Sea ABC con ángulos α , β , γ .

Supongamos que la bisectriz de $\angle B_1 A_1 C_1$ es perpendicular a OI.

Dado que I es el circuncentro de $B_1 A_1 C_1$, la bisectriz del ángulo pedido cortará a la mediatriz del lado $B_1 C_1$ en su confluencia D con la circunferencia inscrita a ABC, es decir la circunscrita a $B_1 A_1 C_1$. La mediatriz de $B_1 C_1$, al ser el triángulo $B_1 A C_1$ isósceles por construcción, es a su vez la bisectriz del ángulo BAC.



Sevilla.