Problema 741. Si a, b, c son las longitudes de tres segmentos que forman un triángulo, demostrar que las longitudes $1/(a+c)$, $1/(b+c)$, $1/(a+b)$ también lo forman.

Linis, V. (1975) Eureka (2), p.7

Solución de Ercole Suppa. A partir de la identidad

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}=\frac{a^2+c^2+\sum ab-b^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

siendo

$$\sum ab > b(a+c) > b^2$$

se deduce que

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+c}$$

Del mismo modo se demuestra que

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+b}$$
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{b+c}$$

entonces $1/(a+c)$, $1/(b+c)$, $1/(a+b)$ son las longitudes de los lados de un triángulo, como queríamos demostrar. $\square$