

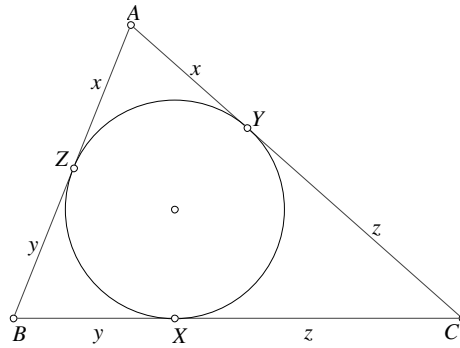
Problema 741 de triángulos cabri. Si a, b, c son las longitudes de tres segmentos que forman un triángulo, demostrar que las longitudes $1/(b+c), 1/(c+a), 1/(a+b)$ también lo forman.

Linis, V. (1975) Eureka (2), p. 7.

Que exista un triángulo con lados a, b, c equivale a que las cantidades $b+c-a, c+a-b$ y $a+b-c$ sean todas positivas.

Usamos la transformación de Ravi: Si X, Y, Z son los puntos de contacto de BC, CA, AB con la circunferencia inscrita y llamamos $x = AY = AZ, y = BX = BZ, z = CX = CY$, se cumplen las relaciones

$$a = y + z, b = z + x, c = x + y.$$



Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} &= \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} - \frac{1}{2x+y+z} \\ &= \frac{3x^2 + y^2 + z^2 + 5xy + 5xz + yz}{(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}, \end{aligned}$$

una expresión siempre positiva, y lo mismo ocurre con las otras dos.