

Problema 741

Si els segments de longitud a, b, c formen un triangle, aleshores els segments de longitud $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ formen un triangle.

Solució de Ricard Peiró i Estruch.

Si els segments a, b, c formen un triangle, aleshores:

$b > a + c$.

$a + b, b + c > 0$. Aplicant la desigualtat entre la mitjana harmònica i aritmètica:

$$\frac{2}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}} \leq \frac{(a+b) + (b+c)}{2}.$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+c+2b} > \frac{4}{a+c+2(a+c)} = \frac{4}{3(a+c)} > \frac{1}{a+c}.$$

$$\text{Anàlogament, } \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b}, \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{b+c}.$$

Aleshores, els segments de longitud $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ formen un triangle.