Problema 741

Si a, b, c son las longitudes de tres segmentos que forman un triángulo, demostrar que las longitudes $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ también lo forman.

Solución de Ricard Peiró i Estruch.

Si los segmentos a, b, c forman un triángulo, entonces:

$b > a + c$.

$a+b, b+c > 0$. Aplicando la desigualdad entre la media harmónica y aritmética:

$$\frac{2}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}} \leq \frac{(a+b)+(b+c)}{2}.$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+c+2b} > \frac{4}{a+c+2(a+c)} = \frac{4}{3(a+c)} > \frac{1}{a+c}.$$

Análogamente, $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a} > \frac{1}{b+c}$.

Entonces, los segmentos de longitud $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ forman un triángulo.