Problema 741

14.- Si a, b ,c son las longitudes de tres segmentos que forman un triángulo, demostrar que las longitudes $1/(a+c)$, $1/(b+c)$, $1/(a+b)$ también lo forman.Linis, V. (1975) Eureka (2), p.7

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Si a,b et c sont les longuuers des côtés d'un triangle, alors, sans perte de généralité, on a les inégalités :
$0 < a \le b \le c$ et $a + b > c$.
On en déduit : $a + b \le a + c \le b + c$ puis $1/(a+b) \ge 1/(a+c) \ge 1/(b+c)$.
Il s'agit de démontrer que $1/(a+c) + 1/(b+c) >?\ 1/(a+b)$
ou encore $(a + b + 2c)(a + b) >?\ (a + c).(b + c) = ab + (a+b)c + c^2$
ou encore $(a+b)^2 + c(a+b) >?\ ab + c^2$.
Or $(a+b)^2 > c^2$, $c(a + b) > c^2$ et $c^2 \ge ab$.
D'où $(a+b)^2 + c(a+b) > 2c^2 \ge ab + c^2$. Cqfd.