

Solución al Problema 742
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 1 al 15 de Septiembre de 2015

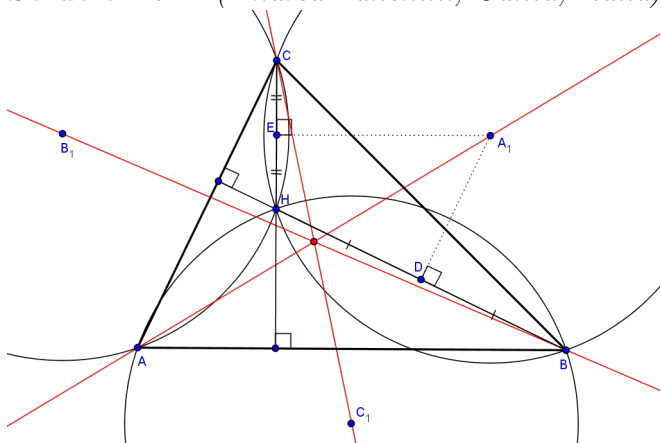
enviada por
Andrea Fanchini
Cantù,
Italia.

Septiembre 7, 2015

Problema 742. *Komal (2011): Mayo.*

Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC , y sean A_1, B_1, C_1 los circuncentros de los triángulos BCH, CAH, ABH . Demostrar que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 concurren.

Solución 742. *(Andrea Fanchini, Cantù, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas sabemos que H tiene coordenadas $H(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$. Por tanto el punto medio entre B y H tiene coordenadas $D(S_BS_C : S_CS_A + S^2 : S_AS_B)$ y la recta por D y perpendicular a BH tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ S_BS_C & S_CS_A + S^2 & S_AS_B \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow DAC_\infty \equiv (S_AS_C + S^2)x - b^2S_By + (S_AS_C + S^2)z = 0$$

Entonces el punto medio entre C y H tiene coordenadas $E(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B + S^2)$ y la recta por E y perpendicular a CH tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ S_BS_C & S_CS_A & S_AS_B + S^2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow EAB_\infty \equiv (S_AS_B + S^2)x + (S_AS_B + S^2)y - c^2S_Cz = 0$$

Ahora el punto A_1 es la intersección entre las rectas DAC_∞ y EAB_∞ y por tanto desarrollando y simplificando tiene coordenadas $A_1(-a^2S_A : S_AS_C + S^2 : S_AS_B + S^2)$.

Cíclicamente tenemos que

$$B_1(S_BS_C + S^2 : -b^2S_B : S_AS_B + S^2), \quad C_1(S_BS_C + S^2 : S_AS_C + S^2 : -c^2S_C)$$

por tanto las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 tienen ecuaciones

$$AA_1 \equiv (S_AS_B + S^2)y - (S_AS_C + S^2)z = 0$$

$$BB_1 \equiv (S_AS_B + S^2)x - (S_BS_C + S^2)z = 0$$

$$CC_1 \equiv (S_AS_C + S^2)x - (S_BS_C + S^2)y = 0$$

y son concurrentes si y sólo si el determinante formado por sus coeficientes se anula

$$\begin{vmatrix} 0 & S_AS_B + S^2 & -(S_AS_C + S^2) \\ S_AS_B + S^2 & 0 & -(S_BS_C + S^2) \\ S_AS_C + S^2 & -(S_BS_C + S^2) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(S_AS_C + S^2)(S_AS_B + S^2)(S_BS_C + S^2) + (S_BS_C + S^2)(S_AS_B + S^2)(S_AS_C + S^2) = 0, \quad q.e.d.$$