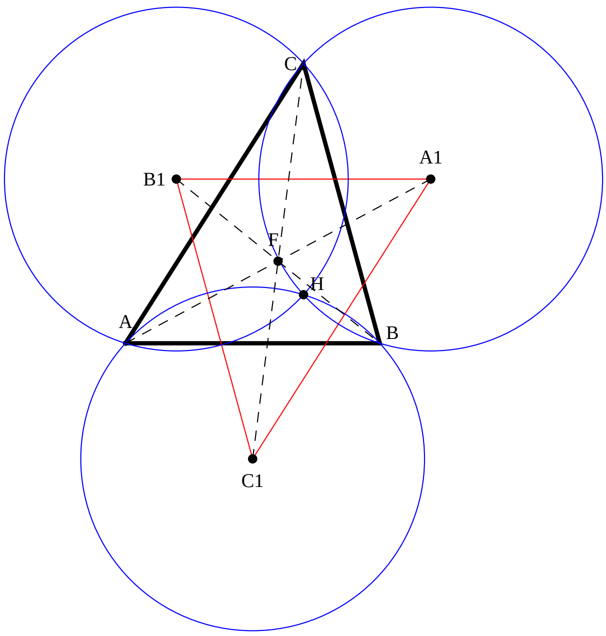
Pr. Cabri 742
Solución de César Beade Franco

Enunciado

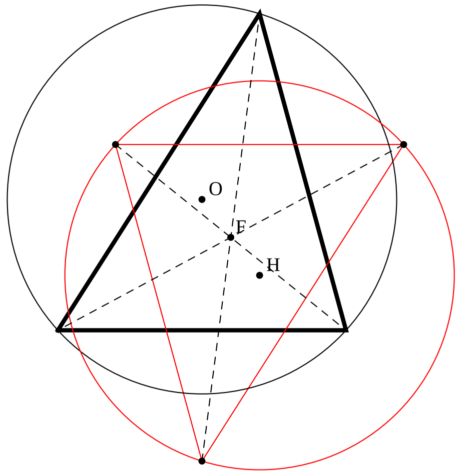
Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC, y sean A1, B1, C1 los circuncentros de los triángulos BCH, CAH, ABH. Demostrar que las rectas AA1, BB1 y CC1 concurren.

Solución

I. Consideremos el triángulo de vértices A(0,0), B(1,0) y C(a,b). Su ortocentro es H$\left(a, \frac{a-a^2}{b}\right)$. Los circuncentros del problema son A1$\left(\frac{1}{2}+a, \frac{a-a^2+b^2}{2b}\right)$, B1$\left(-\frac{1}{2}+a, \frac{a-a^2+b^2}{2b}\right)$ y C1$\left(\frac{1}{2}, -\frac{(-1+a)a+b^2}{2b}\right)$ que son los vértices de un triángulo homotético con el anterior de razón -1. Las rectas que unen vértices homólogos pasan todas por el centro de homotecia, que será el punto medio de dos puntos homólogos cualesquiera.



II. Resulta que el circuncentro de A1B1C1 es precisamente H, homólogo, por tanto, de O (circuncentro de ABC). Así pues el centro de homotecia y punto de concurrencia buscado es precisamente F, el centro de la circunferencia de los 9 puntos.



III. Además los dos triángulos se cortan en 6 puntos que están sobre una elipse cuyo centro es F. Y no solo eso, también los lados del hexágono determinado por los puntos anteriores son tangentes a una elipse con el mismo centro F.