Problema 742.-
Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC, y sean A_1, B_1, C_1 los circuncentros de los triángulos BCH, CAH, ABH. Demostrar que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 concurren.

Komal (2011): Mayo. http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=honap&h=201105&t=mat&l=en

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Considerando el triángulo ACH **(Fig.1)**, tenemos que, en efecto, el vértice B sería el ortocentro de dicho triángulo. Por tanto, respecto del triángulo ACH, tenemos que B_2, punto medio del segmento BB_1 $(BB_1 \equiv Ortocentro - Circuncentro)$, sería el centro de la circunferencia de Feuerbach o de los 9 puntos del triángulo ACH.

En definitiva así construida, dicha circunferencia pasaría, por tanto, por los puntos medios de dichos lados. Entonces, esa circunferencia coincidirá con la de Feuerbach de centro el punto F, punto medio del segmento OH, $(OH \equiv Ortocentro - Circuncentro)$ asociada al triángulo inicial ABC.

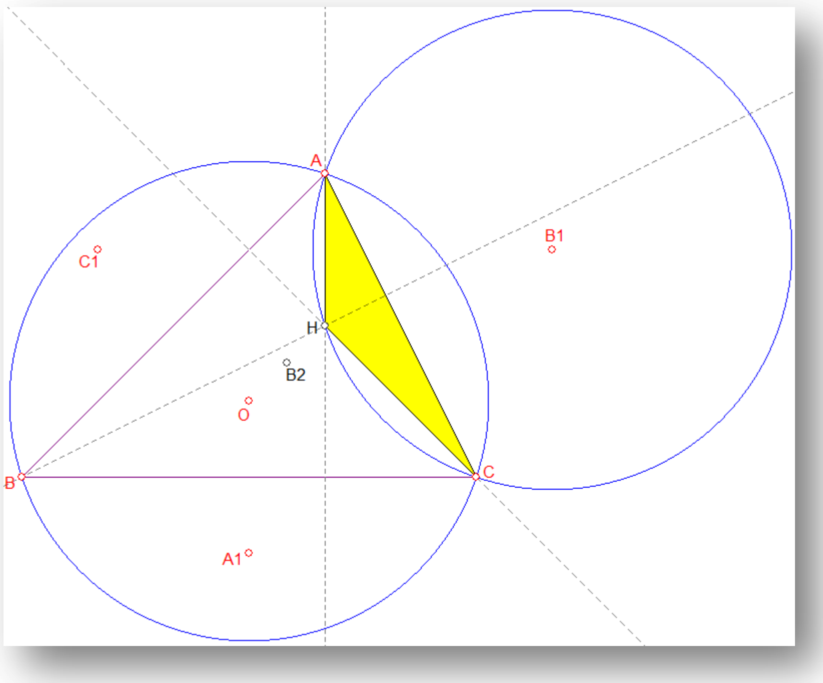

Fig. 1

Por un mismo razonamiento, al considerar ahora el triángulo ABH, el punto C_2, punto medio del segmento CC_1, coincidiría con el centro F de la circunferencia de los 9 puntos del triángulo inicial ABC.

De igual modo, para el triángulo BCH, el punto A_2, punto medio del segmento AA_1, coincidiría con el centro F de la circunferencia de los 9 puntos del triángulo inicial ABC. **(Fig.2)**

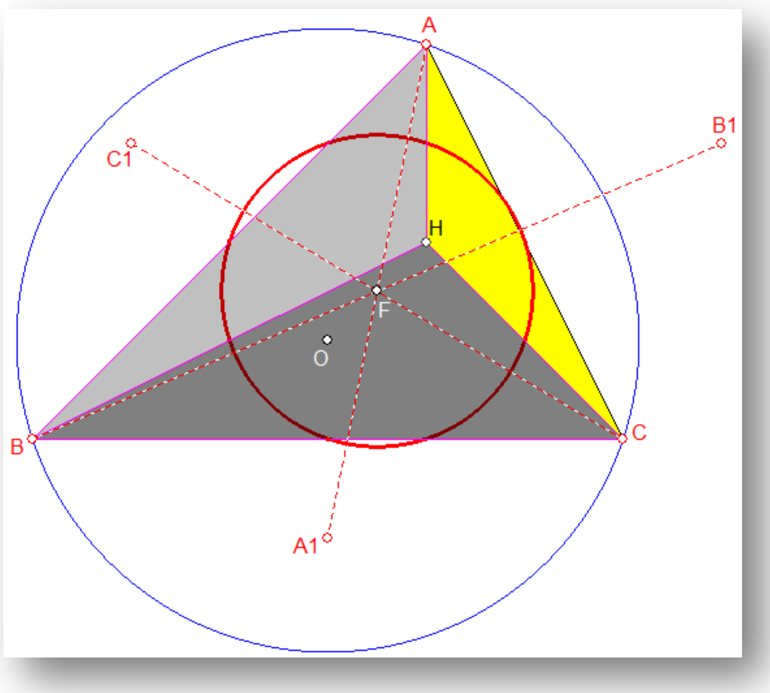

Fig. 2

En definitiva pues, los puntos $A_2 = B_2 = C_2 = F$, y así de este modo probaríamos que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 concurrirían en un punto, el punto F, centro de la circunferencia de los 9 puntos de los triángulos $ABC, ABH, BCH \text{ y } ACH$, $cqd.$ ■