

Problema 742.

Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC , y sean A_1, B_1, C_1 los circuncentros de los triángulos BCH, CAH, ABH .

Demostrar que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 concurren.

Komal (2011): Mayo

<http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=honap&h=201105&t=mat&l=en>

N. de D. (la restricción a los acutángulos creo que no es necesaria)

Solución del director.

Solución

$BA_1 = CA_1 = BC_1 = AC_1 = CB_1 = AB_1 = OA = OB = OC$.

Es decir, las circunferencias circunscritas a HAB, HBC y HCA son las simétricas de la circunferencia circunscrita a ABC respecto a AB, BC y CA .

Además si α, β y γ son los ángulos de ABC , tenemos que

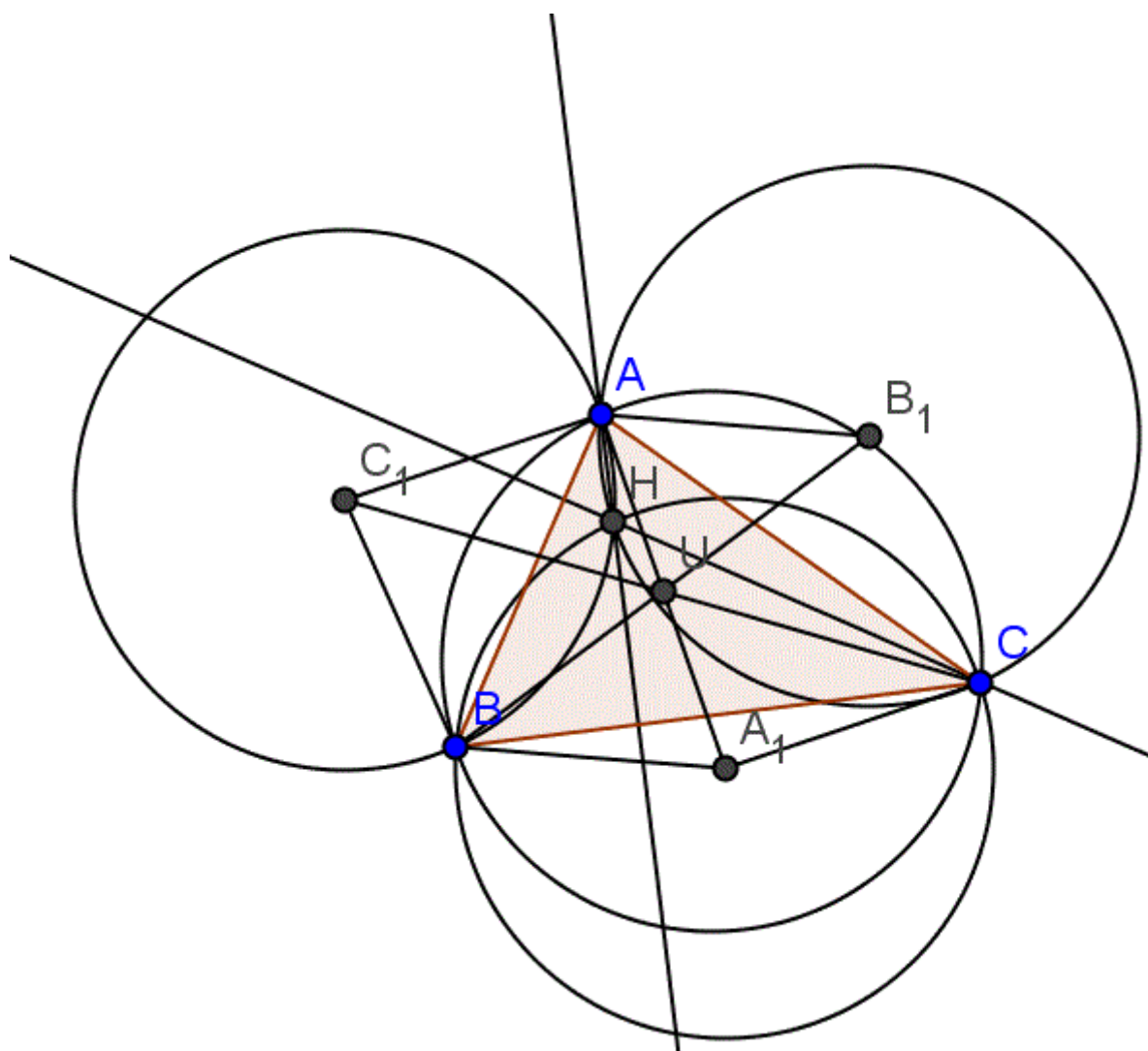
$\angle AC_1B = 2\gamma, \angle C_1AB_1 = 2\alpha, \angle AB_1C = 2\beta, \angle B_1CA_1 = 2\gamma, \angle CA_1B = 2\alpha, \angle A_1BC_1 = 2\beta$

Así, si trazamos A_1A , tendremos dos cuadriláteros:

A_1CB_1A y A_1BC_1A , que son tales que $\angle CA_1A = \angle C_1AA_1$, y $\angle BA_1A = \angle B_1AA_1$, por ser los lados y ángulos de ambos cuadriláteros iguales en sentido contrario.

De igual manera sucede con B_1B ; tendremos los cuadriláteros B_1CA_1B , y BC_1AB_1 , cuyos ángulos son iguales en sentido contrario.

Así si trazamos A_1A y B_1B se cortarán en U siendo los triángulos AB_1U y A_1UB con los tres ángulos iguales y el lado $AB_1 = A_1B$. Por ello U es el punto medio de AA_1 y de B_1B . De igual manera es el punto medio de B_1B y C_1C



Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla