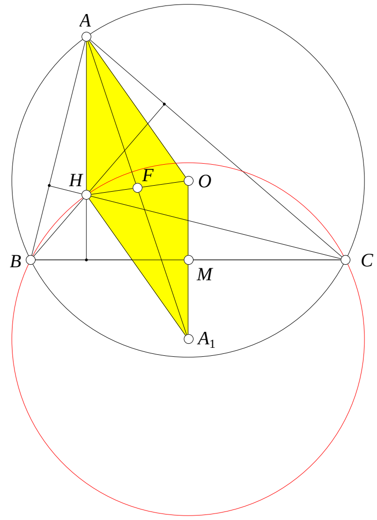
Problema 742. Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC, y sean A_1, B_1, C_1 los circuncentros de los triángulos BCH, CAH, ABH. Demostrar que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 concurren.

Komal (2011), Mayo

Solución de Ercole Suppa. Sea O el circoncentro de $\triangle ABC$, sea $F = AA_1 \cap OH$, sea M el punto medio de BC y denotamos con R, R_A, R_B, R_C los radios de las circunferencias $\odot(ABC)$, $\odot(BCH)$, $\odot(CAH)$, $\odot(ABH)$, respectivamente.



Para obtener el resultado solicitado bastará comprobar que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 pasan por el punto medio de OH (punto de Feuerbach triángulo ABC).

Por ley de senos aplicada a los triángulos $\triangle ABC$ e $\triangle BCH$ tenemos que

$$BC = 2R\sin A$$
$$BC = 2R_A\sin(180^\circ - A) = 2R_A\sin A$$

de donde se sigue que $R = R_A$. Del mismo modo se demuestra que $R_B = R_C = R$.

Siendo $BO = R = R_A = BA_1$ tenemos $\triangle BMO \cong \triangle BMA_1$. Entonces $OM = MA_1$ y

$$OA_1 = 2\cdot OM = 2\cdot OB\cdot\cos(\angle BOM) = 2R\cos A \tag{1}$$

Por otro lado la ley de los senos aplicada al triángulo $\triangle AHC$ ofrece

$$AH = 2\cdot R_B\sin(\angle ACH) = 2\cdot R\sin(90^\circ - A) = 2R\cos A \tag{2}$$

De (1) y (2) se deduce que $AH = OA_1$, entonces el cuadrilátero AHA_1O es un paralelogramo, dado que $AH \parallel OA_1$.

Entonces $HF = FO$ y la demostración está completa. $\square$

Segunda solución. Usando coordenadas baricéntricas[1] los puntos A_1, B_1 y C_1 tienen coordenadas

$$A_1\left(a^4-a^2b^2-a^2c^2 : -a^4+a^2b^2+2a^2c^2+b^2c^2-c^4 : -a^4+2a^2b^2+a^2c^2-b^4+b^2c^2\right)$$
$$B_1\left(-a^2b^2-a^2c^2+b^4-2b^2c^2+c^4 : a^2b^2-b^4+b^2c^2 : a^4-2a^2b^2-a^2c^2+b^4-b^2c^2\right)$$
$$C_1\left(a^2b^2+a^2c^2-b^4+2b^2c^2-c^4 : -a^4+a^2b^2+2a^2c^2+b^2c^2-c^4 : -a^2c^2-b^2c^2+c^4\right)$$

[1] En la realización de los cálculos se utilizó MATHEMATICA y el paquete `baricentricas.nb`, descargable desde el sitio de Francisco Javier García Capitán http://garciacapitan.99on.com/baricentricas/.

Las rectas AA_1, BB_1, CC_1 tienen ecuaciones

$$\begin{aligned} AA_1 &: \left(a^4+b^4-2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2\right)y+\left(2a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2-a^4-c^4\right)z=0 \\ BB_1 &: \left(a^4+b^4-2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2\right)x+\left(a^2b^2+2b^2c^2+a^2c^2-b^4-c^4\right)z=0 \\ CC_1 &: \left(a^4+c^4-a^2b^2-2a^2c^2-b^2c^2\right)x+\left(a^2b^2+a^2c^2+2b^2c^2-b^4-c^4\right)y=0 \end{aligned}$$

y son concurrentes puesto que

$$\begin{vmatrix} 0 & a^4+b^4-2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2 & 2a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2-a^4-c^4 \\ a^4+b^4-2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2 & 0 & a^2b^2+2b^2c^2+a^2c^2-b^4-c^4 \\ a^4+c^4-a^2b^2-2a^2c^2-b^2c^2 & a^2b^2+a^2c^2+2b^2c^2-b^4-c^4 & 0 \end{vmatrix}=0$$

El punto F de intersección de AA_1, BB_1, CC_1 tiene coordenadas baricéntricas

$$F\left(\left(b^2-c^2\right)^2-a^2\left(b^2+c^2\right), a^4-a^2\left(b^2+2c^2\right)-b^2c^2+c^4, a^4-a^2\left(2b^2+c^2\right)+b^4-b^2c^2\right)$$

de donde se sigue que F es el punto de Feuerbach del triángulo ABC. $\square$