

Problema 742.

Siga $\triangle ABC$ un triangle i H el seu ortocentre.

Siguen A' , B' , C' els circumcentres dels triangles $\triangle BHC$, $\triangle AHC$, $\triangle AHB$, respectivament. Proveu que les rectes AA' , BB' , CC' s'intersequen en un punt.

Solució de Ricard Peiró:

Siga O el circumcentre del triangle $\triangle ABC$.

$\overline{A'B'}$ pertany a la mediatriu del segment $\overline{CH}$.

$\overline{CH}$ és perpendicular al costat $\overline{AB}$.

Aleshores, $\overline{A'B'}$ és paral·lel al costat $\overline{AB}$.

Anàlogament, $\overline{A'C'}$ és paral·lel al costat $\overline{AC}$, $\overline{B'C'}$ és paral·lel al costat $\overline{BC}$.

Aleshores, els triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ són homotètics. El centre d'homotècia és la intersecció de les rectes AA' , BB' , CC' .

Vegem que els dos triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ són iguals.

$\overline{B'A} = \overline{B'C} = \overline{B'H}$.

$\overline{C'A} = \overline{C'B} = \overline{C'H}$.

$\angle AB'H = 2\angle ACH = 2(90^\circ - A) = 180^\circ - 2A$.

$\angle CB'H = 2\angle CAH = 2(90^\circ - C) = 180^\circ - 2C$.

Aleshores, $\angle AB'C = 360^\circ - 2A - 2C = 2B$.

$\angle AOC = 2B$.

Aleshores, els triangles isòsceles $\triangle AB'C$, $\triangle AOC$.

Aleshores: $\overline{B'H} = \overline{B'A} = \overline{OA}$.

$\angle AC'H = 2\angle ABH = 2(90^\circ - C) = 180^\circ - 2C$.

Aleshores, els triangles isòsceles $\triangle AB'H$, $\triangle AC'H$ són iguals. Aleshores:

$\overline{B'A} = \overline{C'A} = \overline{B'C} = \overline{C'B} = \overline{B'H} = \overline{C'H}$.

Anàlogament, $\overline{A'H} = \overline{B'H} = \overline{C'H}$.

Aleshores, H és el circumcentre del triangle $\triangle A'B'C'$.

Aleshores, els triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ són semblants i tenen igual radi de la circumferència circumscrita, per tant, són iguals.

Els triangles són homotètics de raó -1 .

Els circumcentres dels dos triangles són homotètics per tant, el centre d'homotècia és el punt mig del segment $\overline{OH}$.

