

Problema 742.

Sea H el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$.

Sean A' , B' , C' los circuncentros de los triángulos $\triangle BHC$, $\triangle AHC$, $\triangle AHB$, respectivamente. Probar que las rectas AA' , BB' , CC' concurren.

Solución de Ricard Peiró i Estruch:

Sea O el circuncentro del triángulo $\triangle ABC$.

$\overline{A'B'}$ pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{CH}$.

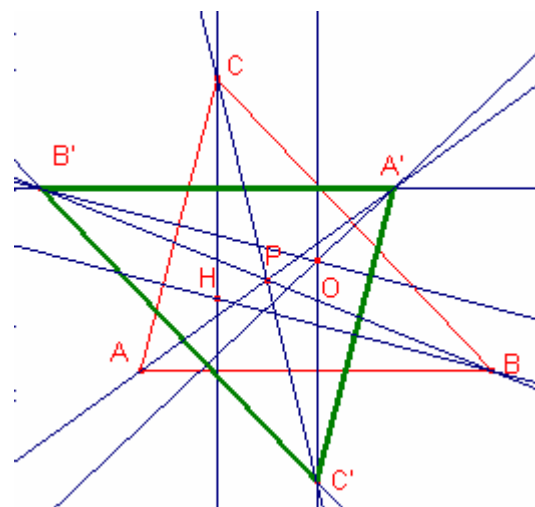
$\overline{CH}$ es perpendicular al lado $\overline{AB}$.

Entonces, $\overline{A'B'}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$.

Análogamente, $\overline{A'C'}$ es paralelo al lado $\overline{AC}$, $\overline{B'C'}$ es paralelo al lado $\overline{BC}$.

Entonces, los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ son homotéticos.

El centro de homotecia es la intersección de las rectas AA' , BB' , CC' .



Veamos que los dos triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ son iguales.

$\overline{B'A} = \overline{B'C} = \overline{B'H}$.

$\overline{C'A} = \overline{C'B} = \overline{C'H}$.

$\angle AB'H = 2\angle ACH = 2(90^\circ - A) = 180^\circ - 2A$.

$\angle CB'H = 2\angle CAH = 2(90^\circ - C) = 180^\circ - 2C$.

Entonces, $\angle AB'C = 360^\circ - 2A - 2C = 2B$.

$\angle AOC = 2B$.

Entonces, los triángulos isósceles $\triangle AB'C$, $\triangle AOC$.

Entonces: $\overline{B'H} = \overline{B'A} = \overline{OA}$.

$\angle AC'H = 2\angle ABH = 2(90^\circ - C) = 180^\circ - 2C$.

Entonces, los triángulos isósceles $\triangle AB'H$, $\triangle AC'H$ son iguales. Entonces:

$\overline{B'A} = \overline{C'A} = \overline{B'C} = \overline{C'B} = \overline{B'H} = \overline{C'H}$.

Análogamente, $\overline{A'H} = \overline{B'H} = \overline{C'H}$.

Entonces, H es el circuncentro del triángulo $\triangle A'B'C'$.

Entonces, los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ son semejantes y tienen igual radio de la circunferencia circunscrita, por tanto, son iguales.

Los triángulos son homotéticos de razón -1 .

Los circuncentros de los dos triángulos son homotéticos por tanto, el centro de homotecia es el punto medio del segmento $\overline{OH}$.