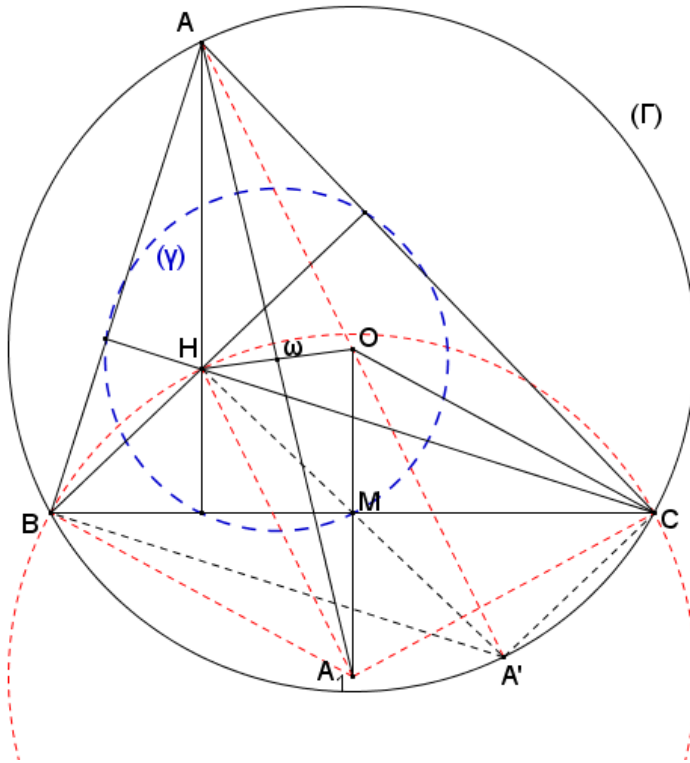


Problema 742

Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC , y sean A_1, B_1, C_1 los circuncentros de los triángulos BCH, CAH, ABH . Demostrar que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 concurren.

Komal (2011): Mayo

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Nous allons démontrer que les droites AA_1, BB_1 et CC_1 sont concourantes au point ω centre du cercle d'Euler (γ) du triangle ABC . Pour ce faire, comme le point ω est le milieu du segment OH qui joint le centre O du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC à l'orthocentre H de ce même triangle, il suffit de démontrer que AA_1 passe par le milieu de OH .

Lemme n°1 : M étant le milieu du côté BC , $AH = 2OM$.

Démonstration : soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle (Γ) . L'angle $\angle ACA'$ étant droit, on a $\angle BCA' = 90^\circ - \angle BCA = \angle CBH$. Les droites BH et CA' sont donc parallèles. Il en est de même des droites BA' et CH . Le quadrilatère $BHCA'$ est un parallélogramme dont les diagonales BC et $A'H$ se coupent en leur milieu M . Les triangles AHA' et OMA' sont homothétiques dans l'homothétie de centre A' et de rapport 2. Il en résulte $AH = 2OM$.

Lemme n°2 : Le point symétrique de O par rapport à BC est le centre du cercle circonscrit au triangle BCH .

Démonstration : soit A_1 le symétrique de O par rapport au côté BC . D'où $OC = A_1C = A_1B$.

D'après le lemme précédent, $AH = OA_1$. Comme les droites AH et OA_1 , perpendiculaires à BC , sont parallèles, AOA_1H est un parallélogramme et l'on a $OA = A_1H$.

Comme $OA = OC$, on a donc $A_1H = A_1B = A_1C$. Cqfd.

Pour finaliser la démonstration, il suffit de constater que dans le parallélogramme AOA_1H , les diagonales AA_1 et OH se coupent au point ω centre du cercle d'Euler (γ) du triangle ABC . Cqfd.