Pr. Cabri 743
Solución de César Beade Franco

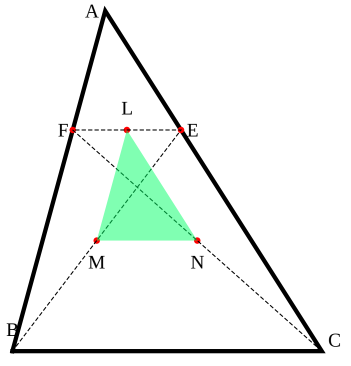
Enunciado

Sea ABC un triángulo isósceles (AB=AC), sean E en CA y F en AB tales que BE y CF son alturas. Considere a L, M y N los puntos medios de EF, BE y CF respectivamente. Muestre que los triángulos ABC y LMN son semejantes.

Solución

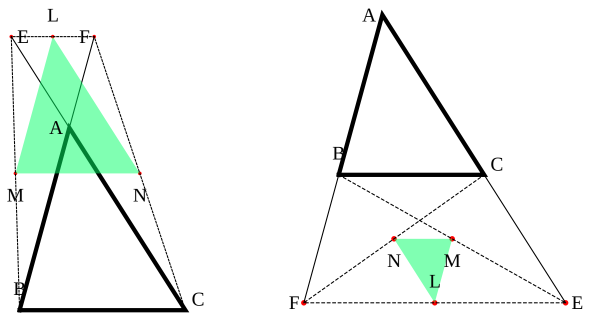
El problema es un caso particular de un resultado más general.
Consideremos un triángulo cualquiera ABC y los puntos E y F tales que EF es paralelo a BC. Los puntos L,M y N se definen como en el problema.
En estas condiciones los lados de LMN son paralelos a los de ABC, de ahí la semejanza de estos triángulos.
Si h es la altuta de ABC y kh la distancia entre los segmentos BC y EF, la razón de semejanza la razón entre las alturas de los triángulos, $r = \frac{\frac{kh}{2}}{h} = \frac{k}{2}$. Pues la altura de LMN es la mitad de la distancia kh.

Out[258]=



Podemos cortar también las prolongaciones de los lados.

Out[293]=



Como esta configuración no se ve alterada por una transformación afín podemos demostrarla analítivamente para un único triángulo, por ejemplo el que tenga de vértices A = (0,1), B = (0,0) y C = (1,0) que cortaríamos por la recta y=k.