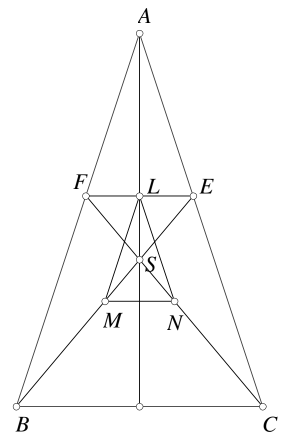
**Problema 743 de triánguloscabri.** *Sea $ABC$ un triángulo isósceles ($AB = AC$), sean $E$ en $CA$ y $F$ en $AB$ tales que $BE$ y $CF$ son alturas. Considere a $L$, $M$ y $N$ los puntos medios de $EF$, $BE$ y $CF$ respectivamente. Muestre que los triángulos $ABC$ y $LMN$ son semejantes.*

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Baja California (6, 1996) Selectivo.




*Solución de Francisco Javier García Capitán.* Podemos sustituir las alturas por las cevianas $CE$ y $CF$ de un punto $S$ situado sobre la altura trazada por $A$. En efecto, sean $A = (0, h)$, $B = (-a, 0)$, $C = (a, 0)$ y llamemos $E$, $F$ a los puntos que dividen los segmentos $AC$ y $AB$ en la razón $t : 1-t$. Entonces tenemos $E = (at, h(1-t))$ y $F = (-at, h(1-t))$, y por tanto, $L = (0, h(1-t))$. Además,

$$M = \left(-\frac{(1-t)a}{2}, \frac{(1-t)h}{2}\right), \quad N = \left(\frac{(1-t)a}{2}, \frac{(1-t)h}{2}\right).$$

$LM$ es paralela a $AB$, ya que

$$\overrightarrow{ML} = \left(\frac{(1-t)a}{2}, \frac{(1-t)h}{2}\right) = \frac{1-t}{2}(a, h) = \frac{1-t}{2}\overrightarrow{BA},$$

siendo $LMN$ el resultado de aplicar a $ABC$ una homotecia de centro $S$ y radio $\frac{1}{2}(1-t)$.