Problema 744.-

El incentro del triángulo ABC es K. El punto medio de AB es C_1 y el de AC es B_1. Las rectas C_1K y AC se cortan en B_2, las rectan B_1K y AB se cortan en C_2.

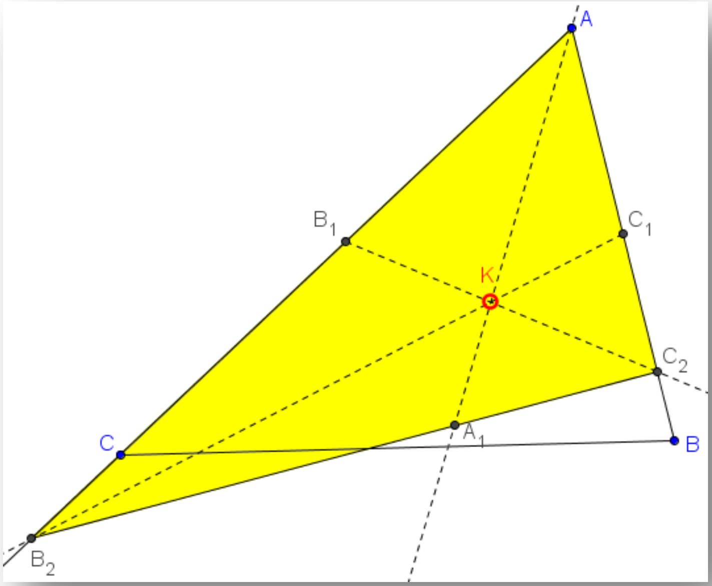
Si las áreas de los triángulos AB_2C_2 y ABC son iguales, ¿cuál es la medida del ángulo CAB?

Problemas planteados en diversas olimpiadas en el mundo

http://www.sectormatematica.cl/olimpiadas/probmundo.htm

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Según la construcción realizada en el triángulo AB_2C_2, la ceviana AK cortaría al lado B_2C_2 en el punto A_1 determinando las siguientes relaciones:



Por el Teorema de la bisectriz, $\frac{B_2A_1}{AB_2} = \frac{C_2A_1}{AC_2}$

Por el Teorema de Ceva, $\frac{AB_1}{B_1B_2} \cdot \frac{B_2A_1}{A_1C_2} \cdot \frac{C_2C_1}{C_1A} = 1$

Llamando $b' = AC_2$ y $c' = AB_2$, las anteriores relaciones se expresarían del modo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{B_2A_1}{c'} = \frac{C_2A_1}{b'} \\ \frac{b}{c' - \frac{b}{2}} \cdot \frac{B_2A_1}{A_1C_2} \cdot \frac{b' - \frac{c}{2}}{c} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{B_2A_1}{C_2A_1} = \frac{c'}{b'} \\ \frac{b}{2c' - b} \cdot \frac{B_2A_1}{A_1C_2} \cdot \frac{2b' - c}{c} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{B_2A_1}{C_2A_1} = \frac{c'}{b'} \\ \frac{b}{2c' - b} \cdot \frac{c'}{b'} \cdot \frac{2b' - c}{c} = 1 \end{cases}$$

En definitiva, obtenemos que:

$$\frac{b}{2c' - b} \cdot \frac{c'}{b'} \cdot \frac{2b' - c}{c} = 1$$

Sea la relación $b'c' = bc$, derivada de la igualdad de áreas de los triángulos AB_2C_2 y ABC.

Entre ambas relaciones, obtenemos la expresión de b’ y c’ en función de b y c.

$$\left\{ \frac{b}{2c' - b} \frac{c'}{b'} \frac{2b' - c}{c} = 1, b'c' = bc \right\} \rightarrow \begin{cases} b' = -b + c + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \\ c' = b - c + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \end{cases}$$

En el triángulo AB_1C_2, tenemos que el valor de su área

$$[\mathrm{AB}_1 C_2] = [\mathrm{AB}_1 K] + [\mathrm{AK}C_2] = \frac{1}{2}\frac{1}{2} b \cdot r + \frac{1}{2} b^{'} . r \ \ (I)$$

siendo r, el radio de la circunferencia inscrita del triángulo ABC.

También se tiene que

$$[\mathrm{AB}_1 C_2] = \frac{1}{2} b^{'} \frac{1}{2} b \cdot sin\measuredangle A = \frac{1}{2}\frac{b'}{c}\frac{1}{2} b \cdot c \cdot sin\measuredangle A = \frac{1}{2} b^{'} \frac{1}{c} [ABC] = \frac{1}{2}\frac{b'}{c}\frac{1}{2} (a+b+c) \cdot r \ \ (II)$$

Igualando ambas expresiones (I) y (II) de $[\mathrm{AB}_1 C_2]$, tenemos que:

$$b + 2b^{'} = \frac{b'}{c}(a+b+c) \to bc = b'(a+b+c) - 2b'c$$

$$bc = b'(a+b-c)$$

Ahora bien, como $bc = b^{'} c^{'} \ \to \ c^{'} = a + b - c$

Igualando ambas expresiones de c’, deducimos que:

$$a + b - c = b - c + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \to \mathrm{a}^2 = b^2 - bc + c^2 \to \cos\measuredangle \mathrm{A} = \frac{1}{2} \to \ \measuredangle \mathrm{A} = 60º$$