

63. El incentro del triángulo ABC es K. El punto medio de AB es C_1 y el de AC es B_1 . Las rectas C_1K y AC se cortan en B_2 , las rectas B_1K y AB se cortan en C_2 . Si las áreas de los triángulos AB_2C_2 y ABC son iguales, ¿cuál es la medida del ángulo $\angle CAB$?

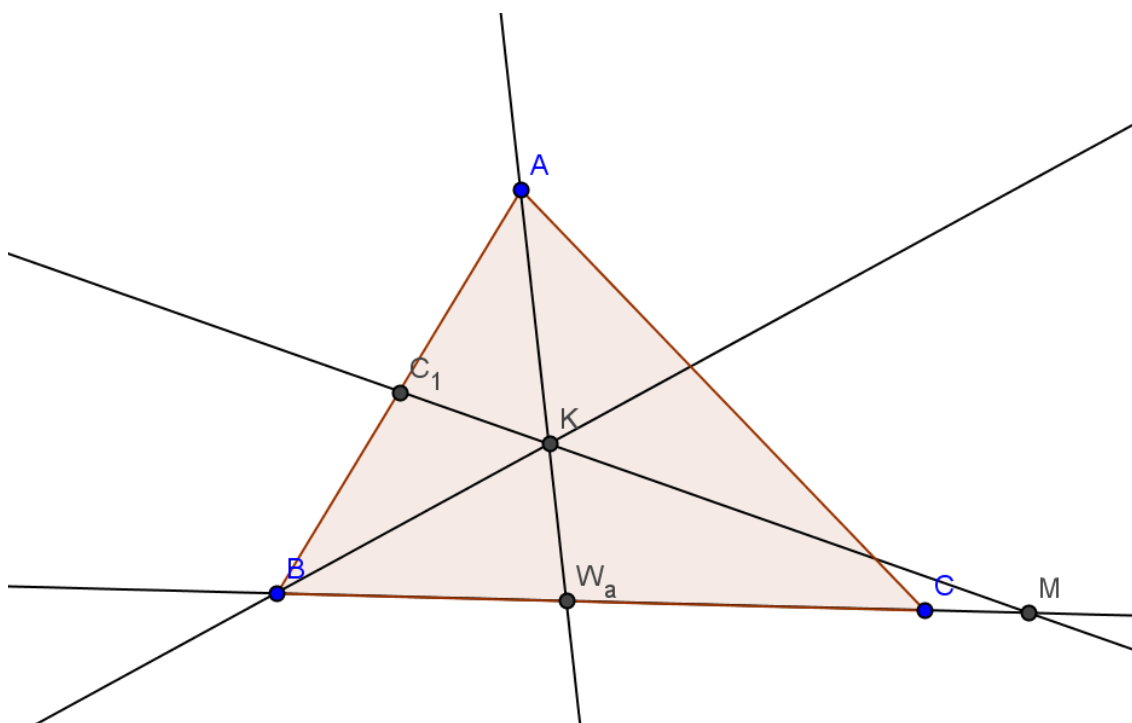
Problemas planteados en diversas olimpiadas en el mundo

<http://www.sectormatematica.cl/olimpiadas/probmundo.htm>

Solución del director.

Consideremos el triángulo formado por AB W_a siendo W_a el pie de la bisectriz del ángulo A.

Consideremos la transversal C_1K que cortará al lado BW_a en M.



Por Menelao ha de ser:

$$(AC_1) (KW_a) (BM) = (C_1B) (AK) (W_aM).$$

Los segmentos involucrados son:

$$AC_1 = C_1B = c/2$$

$$\text{Es } AW_a = \sqrt{ba\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}$$

$$AK = \frac{b+c}{a+b+c} \sqrt{ba\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}$$

$$KW_a = \frac{a}{a+b+c} \sqrt{ba(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2})}$$

BM = a+p siendo p=CM

$$W_a M = W_a C + CM = \frac{ab}{b+c} + p$$

Así (AC₁) (KW_a) (BM) = (C₁B) (AK) (W_aM) es:

$$(c/2) (\frac{a}{a+b+c} \sqrt{ba(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2})}) (a+p) = (c/2) (\frac{b+c}{a+b+c} \sqrt{ba(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2})}) (\frac{ab}{b+c} + p)$$

Simplificando es:

$$a(a+p) = ab + p(b+c)$$

$$\text{De donde } p = \frac{a^2 - ab}{b+c-a} = a \frac{a-b}{b+c-a}$$

Consideremos ahora el triángulo AW_aC con su transversal KM. Corta a AC en B₂, siendo de nuevo por Menelao:

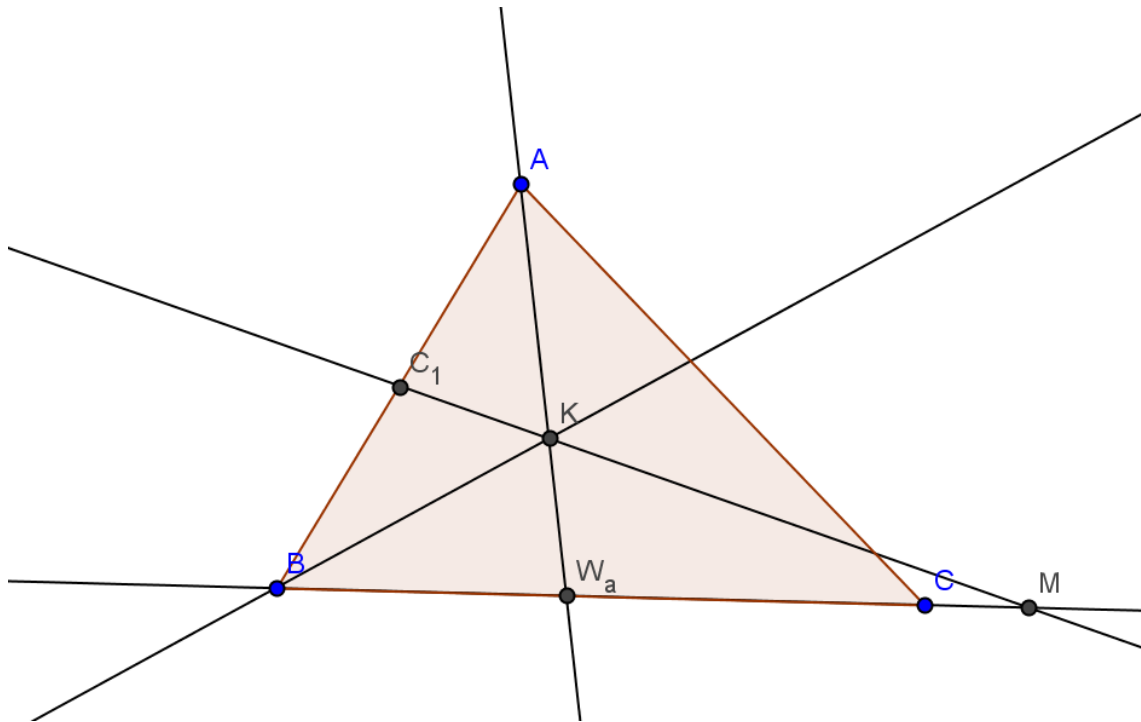
$$(AK) (MW_a) (CB_2) = (KW_a)(MC) (AB_2)$$

Sea AB₂=n

Es decir:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b+c}{a+b+c} \sqrt{ba \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right)} \right) \left(\frac{ab}{b+c} + a \frac{a-b}{b+c-a} \right) (b-n) \\ &= \left(\frac{a}{a+b+c} \sqrt{ba \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right)} \right) \left(a \frac{a-b}{b+c-a} \right) n \end{aligned}$$

De donde, simplificando, tenemos:



$$(b+c) \left(\frac{b}{b+c} + \frac{a-b}{b+c-a} \right) (b-n) = \left(a \frac{a-b}{b+c-a} \right) n$$

De donde $AB_2 = n = \frac{cb}{a+c-b}$

Haciendo los cálculos análogos,

$$\text{Es } AC_2 = \frac{cb}{a+b-c}$$

Para que $[AB_2C_2] = [ABC]$, ha de ser

$$AB_2 AC_2 = AB AC$$

$$\text{Es decir: } \frac{cb}{a+c-b} \frac{cb}{a+b-c} = bc$$

$$\text{De donde } cb = a^2 + ab - ac + ca + cb - c^2 - ba - b^2 + bc$$

$$\text{Y } a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

Luego $\cos A = 1/2$, y por último, $A = 60^\circ$

Ricardo Barroso Campos

Jubilado. Sevilla. España.