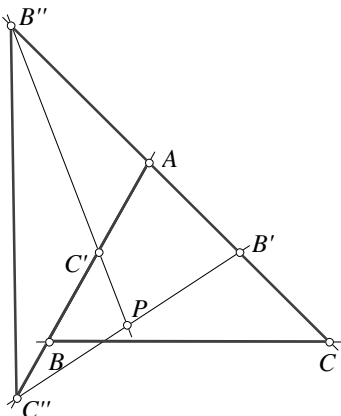


**Problema 744 de triángulos cabri.** El incentro del triángulo  $ABC$  es  $I$ . El punto medio de  $AB$  es  $C'$  y el de  $AC$  es  $B'$ . Las rectas  $C'I$  y  $AC$  se cortan en  $B''$ , las rectas  $B'I$  y  $AB$  se cortan en  $C''$ . Si las áreas de los triángulos  $ABC''$  y  $ABC$  son iguales, ¿cuál es la medida del ángulo  $CAB$ ?

<http://www.sectormatematica.cl/olimpiadas/probmundo.htm>

Solución de *Francisco Javier García Capitán*. Vamos a sustituir el incentro  $I$  por un punto cualquiera y vamos a plantear el problema con más generalidad usando lugares geométricos.

**Problema 2.** Sean  $ABC$  un triángulo,  $P$  un punto y  $B', C'$  los puntos medios de  $CA$  y  $AB$ . Las rectas  $C'P$  y  $AC$  se cortan en  $B''$ , las rectas  $B'P$  y  $AB$  se cortan en  $C''$ . Hallar el lugar geométrico de los puntos  $P$  tales que los triángulos  $AB''C''$  y  $ABC$  tienen la misma área.



*Solución del Problema 2.* Veamos que el lugar geométrico es una hipérbola. Si  $P = (u : v : w)$  entonces  $B'' = (x - y : 0 : z)$  y  $C'' = (x - z : y : 0)$ . Los triángulos  $AB''C''$  y  $ABC$  tendrán la misma área si

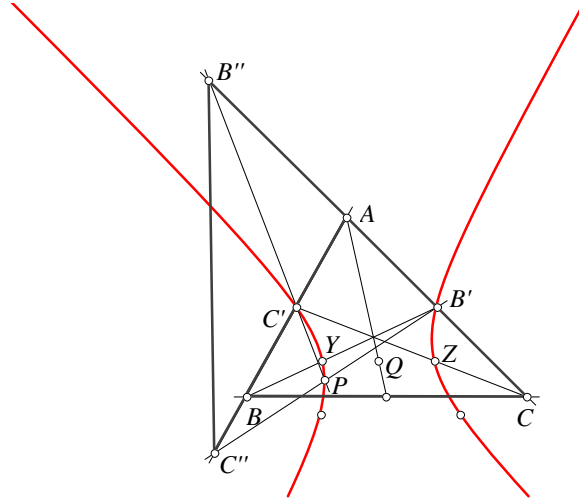
$$\frac{1}{(x - y + z)(x + y - z)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x - y & 0 & z \\ x - z & y & 0 \end{vmatrix} = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow (x - y + z)(x + y - z) = \pm yz,$$

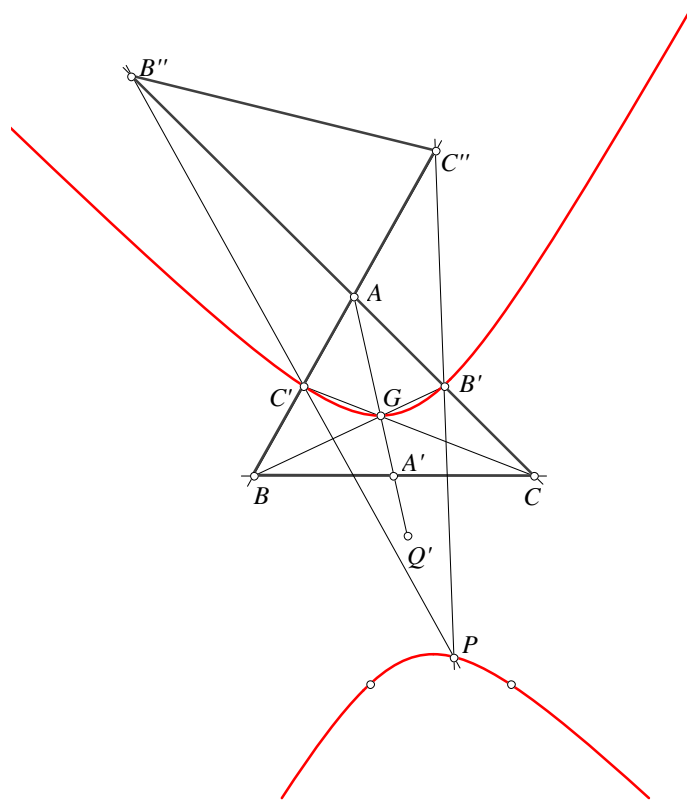
igualdad que conduce a las cónicas  $\Gamma_1 : x^2 - y^2 - z^2 + 3yz = 0$  y  $\Gamma_2 : x^2 - y^2 - z^2 + yz = 0$ .

**La cónica  $\Gamma_1$ .** La cónica  $\Gamma_1$  pasa por los puntos medios de  $B'$  y  $C'$  y tiene su centro en el punto  $Q = (1 : 2 : 2)$ , que divide a la mediana  $AA'$  en la razón 4:1. La paralela por  $Q$  a  $BC$  corta a las medianas  $BB'$  y  $CC'$  en los puntos  $Y = (1 : 3 : 1)$  y  $Z = (1 : 1 : 3)$ , que son puntos de la cónica. Estos cuatro puntos, junto con los simétricos de  $B'$  y  $C'$  respecto de  $Q$  nos dan seis puntos de la cónica, suficientes para trazarla.

Observemos también que  $\Gamma_1$  pasa por los puntos  $(-1 : 0 : 1)$  y  $(-1 : 1 : 0)$ , puntos del infinito de las rectas  $CA$  y  $AB$ , por lo que  $\Gamma_1$  es siempre una hipérbola, con asíntotas paralelas a  $CA$  y  $AB$ .



**La cónica  $\Gamma_2$ .** La cónica  $\Gamma_2$  también pasa por los puntos medios de  $B'$  y  $C'$  y tiene su centro en el punto  $Q' = (1 : 2 : 2)$ , simétrico del baricentro  $G$  respecto del punto medio  $A'$  de  $BC$ . También se trata de una hipérbola con asíntotas paralelas a  $CA$  y  $AB$ .



Para dar respuesta a la cuestión planteada por el problema original, basta observar que el incentro  $I = (a : b : c)$  deberá estar en alguna de las cónicas  $\Gamma_1$  o  $\Gamma_2$ , lo cual equivale respectivamente a que  $\cos A = \frac{3}{2}$  (imposible) o  $\cos A = \frac{1}{2}$ , cuando el ángulo  $A$  mide  $60^\circ$ .