

Problema 744

L' incentre del triangle $\triangle ABC$ és K. El punt mig de $\overline{AB}$ és C_1 i el de $\overline{AC}$ és B_1 .

Les rectes C_1K i AC es tallen en B_2 , les rectes B_1K i AB es tallen en C_2 .

Si les àrees dels triangles $\triangle AB_2C_2$ i $\triangle ABC$ són iguals, Quina és la mesura de l'angle $\angle CBA$?.

Solució Ricard Peiró i Estruch:

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és:

$S_{ABC} = bc \cdot \sin A = rp$, on r és el radi de la circumferència inscrita i p el semiperímetre.

Les àrees dels triangles $\triangle AB_2C_2$ i $\triangle ABC$ són iguals, aleshores:

$$\frac{1}{2} \overline{AB_2} \cdot \overline{AC_2} \cdot \sin A = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A. \text{ Simplificant:}$$

$$\overline{AB_2} \cdot \overline{AC_2} = bc \quad (1)$$

Els triangles $\triangle AC_1B_2$ i $\triangle AC_1C$ tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:

$$\frac{S_{AC_1B_2}}{S_{AC_1C}} = \frac{\overline{AB_2}}{\frac{b}{2}} \cdot \frac{S_{AC_1B_2}}{\frac{1}{2} S_{ABC}} = \frac{\overline{AB_2}}{\frac{b}{2}}.$$

$$S_{AC_1B_2} = \frac{\overline{AB_2}}{b} S_{ABC} \quad (2)$$

$$S_{AKC_1} = \frac{1}{2} \frac{c}{2} r \quad (3)$$

$$S_{AKB_2} = \frac{1}{2} \overline{AB_2} \cdot r \quad (4)$$

$S_{AC_1B_2} = S_{AKC_1} + S_{AKB_2}$, aleshores:

$$\frac{\overline{AB_2}}{b} S_{ABC} = \frac{1}{2} \frac{c}{2} r + \frac{1}{2} \overline{AB_2} \cdot r \quad (5)$$

$$\frac{\overline{AB_2}}{b} \frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{1}{2} \frac{c}{2} r + \frac{1}{2} \overline{AB_2} \cdot r \quad (6)$$

Simplificant:

$$\frac{\overline{AB_2}}{b} (a+b+c) = \frac{c}{2} + \overline{AB_2}.$$

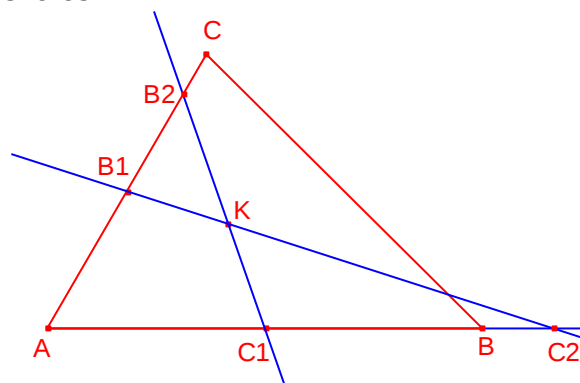
$$\overline{AB_2} = \frac{bc}{a-b+c} \quad (7)$$

Anàlogament aplicant el procediment al triangle $\triangle ABB_1$:

$$\overline{AC_2} = \frac{bc}{a+b-c} \quad (8)$$

Multiplicant les expressions (7) (8):

$$\overline{AB_2} \cdot \overline{AC_2} = \frac{bc}{a-b+c} \cdot \frac{bc}{a+b-c} \quad (9)$$



Substituint l'expressió (1) en l'expressió (9):

$$bc = \frac{bc}{a-b+c} \cdot \frac{bc}{a+b-c} \quad (10)$$

Simplificant:

$$(a-b+c)(a+b-c) = bc \quad (11)$$

$$a^2 - (b-c)^2 = bc \quad (12)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \quad (13)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad (14)$$

Igualant les expressions (13) (14):

$$\cos A = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$A = 60^\circ.$$