Problema 744

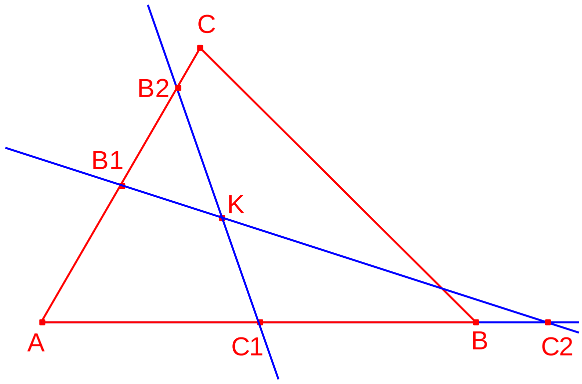
El incentro del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es K. El punto medio de $\overline{AB}$ es C_1 y el de $\overline{AC}$ es B_1. Las rectas C_1K y AC se cortan en B_2, las rectan B_1K y AB se cortan en C_2. Si las áreas de los triángulos $\overset{\Delta}{AB_2C_2}$ t $\overset{\Delta}{ABC}$ son iguales, ¿cuál es la medida del ángulo $\angle CBA$?.

Solución Ricard Peiró i Estruch:

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

$S_{ABC} = bc \cdot \sin A = rp$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita y p el semiperímetro.

Las áreas de los triángulos $\overset{\Delta}{AB_2C_2}$ i $\overset{\Delta}{ABC}$ son iguales, entonces:



$\frac{1}{2}\overline{AB_2} \cdot \overline{AC_2} \cdot \sin A = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$. Simplificando:

$$\overline{AB_2} \cdot \overline{AC_2} = bc \qquad (1)$$

Los triángulos $\overset{\Delta}{AC_1B_2}$ i $\overset{\Delta}{AC_1C}$ tienen la misma altura las áreas son proporcionales a las bases:

$$\frac{S_{AC_1B_2}}{S_{AC_1C}} = \frac{\overline{AB_2}}{\frac{b}{2}}. \quad \frac{S_{AC_1B_2}}{\frac{1}{2}S_{ABC}} = \frac{\overline{AB_2}}{\frac{b}{2}}.$$

$$S_{AC_1B_2} = \frac{\overline{AB_2}}{b} S_{ABC} \qquad (2)$$

$$S_{AKC_1} = \frac{1}{2}\frac{c}{2} r \qquad (3)$$

$$S_{AKB_2} = \frac{1}{2}\overline{AB_2} \cdot r \qquad (4)$$

$S_{AC_1B_2} = S_{AKC_1} + S_{AKB_2}$, entonces:

$$\frac{\overline{AB_2}}{b} S_{ABC} = \frac{1}{2}\frac{c}{2} r + \frac{1}{2}\overline{AB_2} \cdot r \qquad (5)$$

$$\frac{\overline{AB_2}}{b} \frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{1}{2}\frac{c}{2} r + \frac{1}{2}\overline{AB_2} \cdot r \qquad (6)$$

Simplificando:

$$\frac{\overline{AB_2}}{b}(a+b+c) = c + 2 \cdot \overline{AB_2}.$$

$$\overline{AB_2} = \frac{bc}{a-b+c} \qquad (7)$$

Análogamente aplicando el procedimiento al triángulo $\overset{\Delta}{ABB_1}$:

$$\overline{AC_2} = \frac{bc}{a+b-c} \qquad (8)$$

Multiplicando las expresiones (7) (8):

$$\overline{AB_2} \cdot \overline{AC_2} = \frac{bc}{a-b+c} \cdot \frac{bc}{a+b-c} \qquad (9)$$

Substituyendo la expresión (1) en la expresión (9):

$$bc = \frac{bc}{a-b+c} \cdot \frac{bc}{a+b-c} \qquad (10)$$

Simplificando:

$$(a-b+c)(a+b-c) = bc \qquad (11)$$

$$a^2 - (b-c)^2 = bc \qquad (12)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \qquad (13)$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \qquad (14)$$

Igualando las expresiones (13) (14):

$$\cos A = \frac{1}{2} \qquad (15)$$

$A = 60^{o}$.