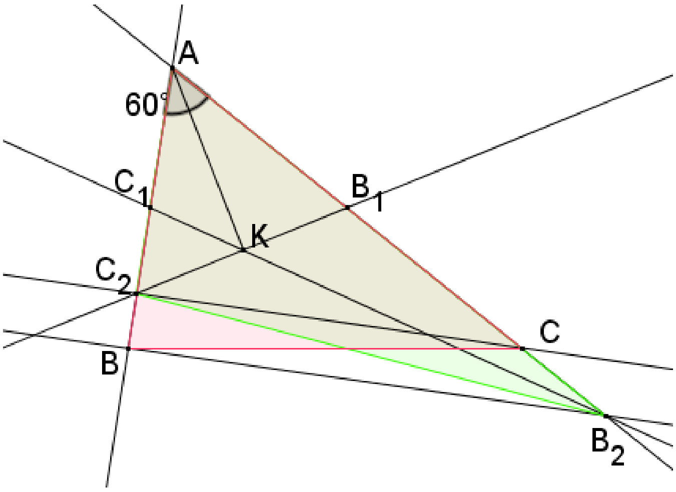
Problema 744

El incentro del triángulo ABC es K. El punto medio de AB es C1 y el de AC es B1 . Las rectas C1 K y AC se cortan en B2 , las rectan B1 K y AB se cortan en C2 . Si las áreas de los triángulos AB2 C2 y ABC son iguales, ¿cuál es la medida del ángulo CAB?
Problemas planteados en diversas olimpiadas en el mundo

Solution proposée par Philippe Fondanaiche
Réponse : $\angle$**BAC = 60°**



On pose BC = a, CA = b , AB = c, C_2A = b', AB_2 = c', r = rayon du cercle inscrit du triangle ABC et s= demi-périmètre du triangle ABC = (a + b + c)/2.
Par hypothèse on a :
- AB_1 = c/2 et AC_1 = b/2.
- aire (ABC) = bc.cos($\angle$BAC) = aire(ABC)= b'c'.cos($\angle$BAC). D'où **b'c' = bc (1**)

Par ailleurs aire(AC_1B_2) = aire(AKB_2) + aire(AC_1K), avec :
- aire(ABC) = rs,
- aire(AC_1B_2) = $\dfrac{AC_1.AB_2}{AB.AC}$ aire(ABC) = $\dfrac{c'rs}{2b}$,
- aire(AKB_2)= $\dfrac{c'r}{2}$,
- aire(AC_1K) = $\dfrac{cr}{4}$.

D'où $\dfrac{c's}{2b} = c' + \dfrac{c}{2}$ qui entraine 2c's = 2bc' + bc puis **c'(a + b – c) = bc. (2)**
Le même raisonnement avec les triangles AB_1C_2,AKB_1 et AC_2K conduit à intervertir b et c d'une part, b' et c' d'autre part dans la relation (2), ce qui donne:
b'(a – b + c) = bc. (3)
Les relations (1), (2) et (3) donnent $a^2 – (b – c)^2$ = bc ou encore $a^2 = b^2 + c^2 – bc$.
La loi des cosinus dans le triangle ABC s'écrit $a^2 = b^2 + c^2 – 2bc.\cos(\angle BAC)$.
Il en résulte cos($\angle$BAC) = 1/2 soit $\angle$**BAC = 60°**