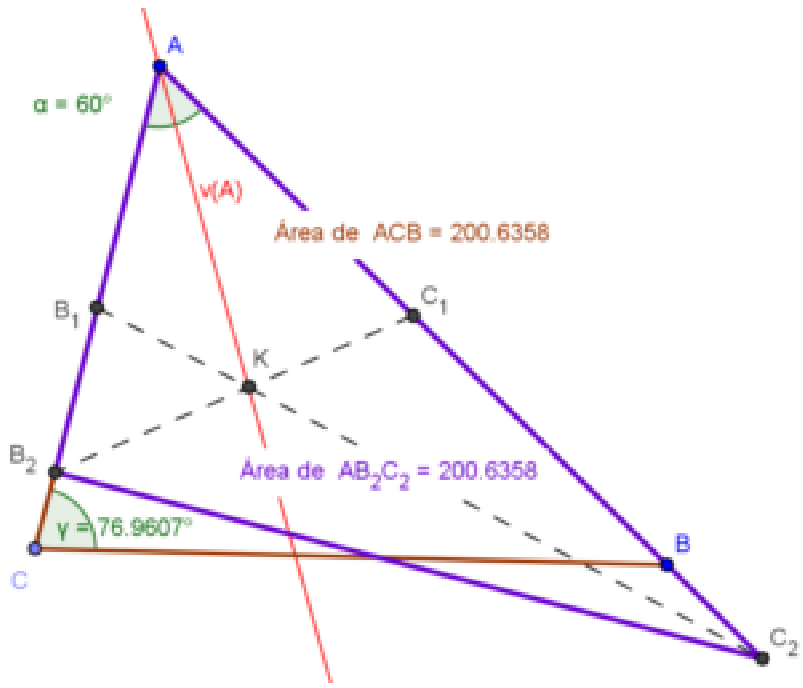
Problema 744.

63. *El incentro del triángulo ABC es K. El punto medio de AB es C_1 y el de AC es B_1. Las rectas C_1K y AC se cortan en B_2, las rectas B_1K y AB se cortan en C_2. Si las áreas de los triángulos AB_2C_2 y ABC son iguales, ¿cuál es la medida del ángulo CAB?*

Problemas planteado en diversas olimpiadas en el mundo.

http://www.sectormatematica.cl/olimpiadas/probmundo.htm

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Usando coordenadas baricéntricas vamos a determinar los vértices del segundo triángulo. Para el punto medio de AB, tenemos $C_1 = (1:1:0)$ y para el incentro $K = (a:b:c)$. La recta que los une es la de ecuación $cx - cy + (b-a)z = 0$ que alcanza al lado AC $(y = 0)$ en el punto $B_2 = (a-b:0:c) = \left(\frac{a-b}{2(s-b)}, 0, \frac{c}{2(s-b)}\right)$ donde s es el semiperímetro de ABC.

De ahí $\overline{AB_2} = \frac{c}{2(s-b)} \cdot \overline{AC}$ y por tanto la longitud del vector es $AB_2 = \frac{bc}{2(s-b)}$. Procediendo para el otro vértice de forma análoga llegaremos a $AC_2 = \frac{bc}{2(s-c)}$.

Que los triángulos ABC y AB_2C_2 tengan igual área significa que $AB \cdot AC = AB_2 \cdot AC_2$.

Con los cálculos efectuados, esa condición es equivalente a

$$\frac{bc}{4(s-b)(s-c)} = 1 \qquad (*)$$

La expresión trigonométrica del seno del ángulo mitad es

$$\frac{(s-b)(s-c)}{bc} = sen^2\frac{A}{2} \quad (**)$$

Multiplicando ambas se obtiene $sen\,\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ (para un triángulo no es posible el valor negativo), de donde $\measuredangle CAB = \hat{A} = 60º$.

■