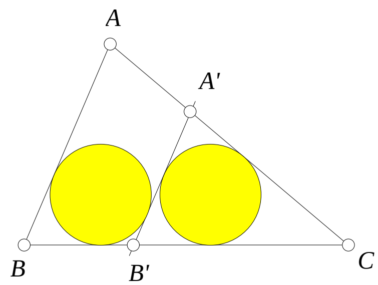
Problema 745. Dado un triángulo ABC, hallar una construcción con regla y compás de una paralela $A'B'$ a AB tal que la distancia entre AB y $A'B'$ sea el doble del radio de la circunferencia inscrita a $A'B'C$.

García Capitán, F. (2015): Comunicación personal.

Solución de Ercole Suppa. Utilizamos la notación usual de la geometría del triángulo: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $p = (a + b + c)/2$, r radio del círculo inscrito en ABC, r' radio del círculo inscrito en $A'B'C$.



Suponiendo que hemos construido la figura, vemos que los triángulos ABC y $A'B'C$ son similares por lo que, siendo $k = A'B'/AB$ tenemos

$$A'B' = k \cdot AB = kc, \qquad B'C = k \cdot BC = ka, \qquad A'C = k \cdot AC = kb, \qquad r' = kr$$

Siendo $[A'B'C] = k^2 \cdot [ABC]$ resulta que

$$[ABB'A'] = [ABC] - [A'B'C] = \left(1 - k^2\right)[ABC] \tag{1}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $r' = kr$ y $r = [ABC]/p$, tenemos

$$[ABB'A'] = \frac{(AB + A'B') \cdot 2r'}{2} = (c + kc)r' = c(k+1)kr = 2c(k+1)k \cdot \frac{[ABC]}{a+b+c} \tag{2}$$

Entonces a partir de (1) y (2) deducimos que

$$\begin{aligned}
\left(1 - k^2\right)[ABC] = 2ck(k+1) \cdot \frac{[ABC]}{a+b+c} \qquad &\Leftrightarrow \\
\left(1 - k^2\right)(a+b+c) = 2ck(k+1) \qquad &\Leftrightarrow \\
(1-k)(a+b+c) = 2ck \qquad &\Leftrightarrow \\
k = \frac{a+b+c}{a+b+3c} \qquad & \qquad (3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $B'C/BC = A'B'/AB = k = (a+b+c)/(a+b+3c)$, de donde se sigue que

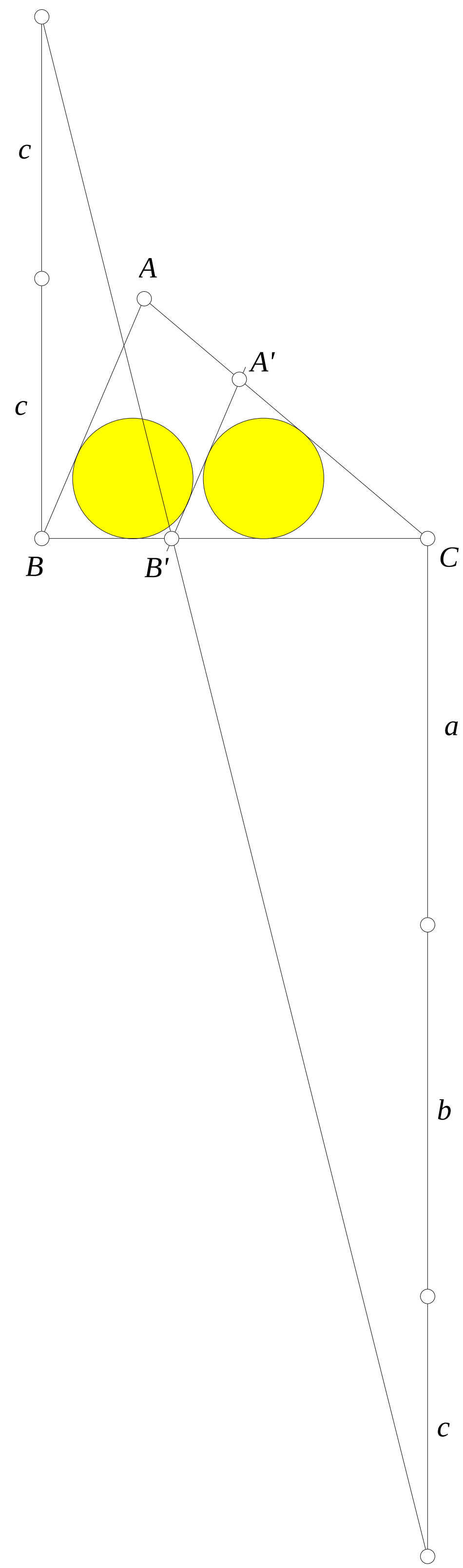
$$B'C = \frac{a+b+c}{a+b+3c} \cdot a \tag{3}$$

$$BB' = BC - B'C = a - \frac{a+b+c}{a+b+3c} \cdot a = \frac{2ac}{a+b+3c} \tag{4}$$

Finalmente, a partir de (3) y (4) se deduce que

$$\frac{BB'}{B'C} = \frac{2c}{a+b+c} \tag{5}$$

Utilizando la fórmula (5) el punto B' se puede obtener con la clásica construcción que se muestra en la página siguiente


c
c
A
A′
B
B′
C
a
b
c

□