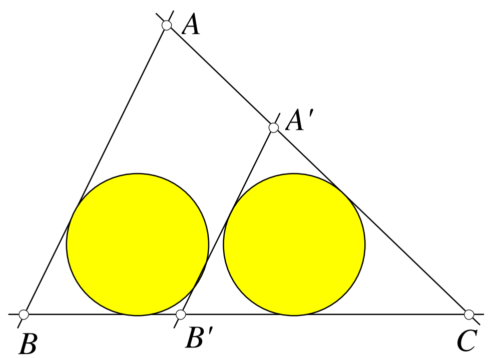
Problema 745 de triánguloscabri. *Dado un triángulo ABC, construir con regla y compás una paralela a AB que corte a CA y BC en A' y B' respectivamente y de manera que la distancia entre AB y $A'B'$ es el doble del radio de la circunferencia inscrita a $A'B'C$.*

Propuesto por Francisco Javier García Capitán.

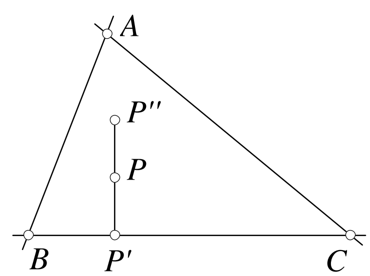


Solución de *Francisco Javier García Capitán*. Comenzamos con un lema que vamos a usar inmediatamente para encontrar varias soluciones de este problema.

Lema 1. *Sean $P = (u : v : w)$ un punto cualquiera del plano del triángulo ABC, P' el pie de la perpendicular trazada por P a BC y P'' el simétrico de P' respecto de P. Entonces las coordenadas de P'' son*

$$P'' = (2a^2u : a^2v - uS_C : a^2w - uS_B).$$

Demostración. Hallemos las coordenadas de P'. Para ello, hallemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y $(-a^2 : S_C : S_B)$, punto del infinito de una perpendicular a BC, y después su intersección con la recta $BC : x = 0$. Todo ello puede hacerse resolviendo el determinante

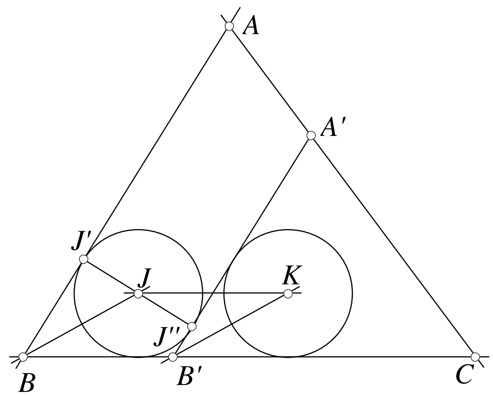


$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ u & v & w \\ -a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (S_Bu + a^2w)y = (S_Cu + a^2v)z,$$

que da el punto $P' = (0 : S_Cu + a^2v : S_Bu + a^2w)$. Como la suma de las coordenadas de P' es $a^2(u + v + w)$, las coordenadas de P'' se deducen de la relación algebraica

$$\begin{aligned} P'' = 2P - P' =& 2(a^2u, a^2v, a^2w) - (0, S_Cu + a^2v, S_Bu + a^2w) \\ =& (2a^2u, a^2v - S_Cu, a^2w - S_Bu). \end{aligned}$$

Análisis del problema. Ahora, sea $J = (u : v : w)$ un punto arbitrario sobre la bisectriz BI del triángulo ABC. Sean Z el pie de J sobre AB y J'' punto simétrico de J' respecto de J.



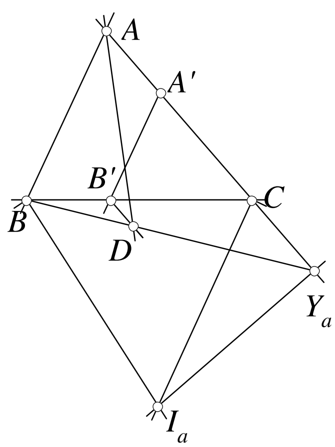
Usando el Lema 1, tenemos que $J'' = (c^2u - S_Bw : c^2v - S_Aw : 2c^2w)$. La paralela por J'' a AB es la recta $2w(x+y) - (u+v-w)z = 0$ y su punto de corte con la recta BC es $B' = (0 : u+v-w : 2w)$. Como las coordenadas de J y B' tienen la misma suma, su punto medio M se puede obtener sumando las coordenadas de ambos. En consecuencia tenemos $M = (u : u+2w-w : 3w)$, y el punto simétrico K de $B = (0 : 2(u+v+w) : 0)$ respecto de M es $K = (u : v-2w : 3w)$.

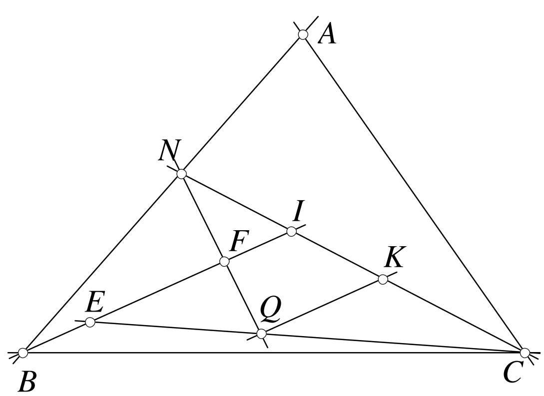
El problema estará resuelto cuando, estando J sobre BI, K esté sobre CI, es decir

$$\begin{cases} cu - aw = 0, \\ bu - a(v-2w) = 0 \end{cases} \Rightarrow J = (a : b+2c : c).$$

A partir de aquí tenemos $B' = (0 : a+b+c : 2c)$ y $K = (a : b : 3c)$.

Construcción 1. Teniendo en cuenta que $BB' : B'C = c : s$, tenemos la siguiente construcción:





Construcción 1 Construcción 2

- I_a es el excentro correspondiente al vértice A.
- Y_a es pie de I_a sobre CA, es decir el punto de contacto de la circunferencia exinscrita (I_a) con el lado CA.
- D es el punto de intersección de las rectas AI_a y BY_a.
- B' es el punto de intersección de BC con la paralela por D a CA.

En efecto, $BB' : B'C = BD : DY_a = AB : AY_a = c : s$.

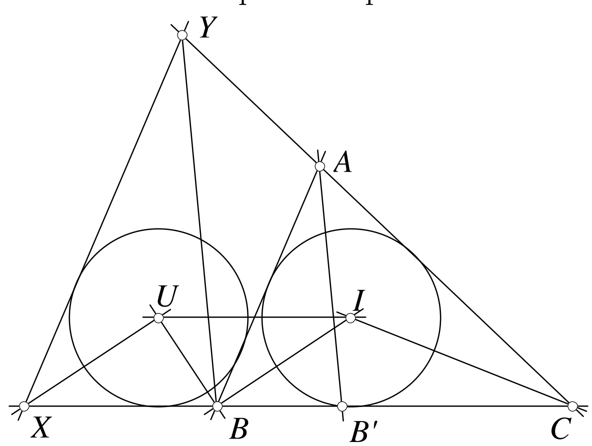
Construcción 2. Esta otra construcción usa el hecho de que $(CNIK) = 3$, siendo N la intersección de CI con AB:

- Sean E, F los puntos que dividen BI en las razones $BE : EF : FI = 1 : 2 : 1$.
- Sea Q el punto de intersección de AE y NF.
- K es el punto de intersección de las rectas CI y la paralela a BI por Q.

En efecto, tenemos

$$(CNIK) = (EFI\infty) = \frac{EI}{FI} : \frac{E\infty}{F\infty} = 3 : 1 = 3.$$

Construcción 3. Podemos prescindir de todos los cálculos anteriores y obtener una construcción del punto B' por el método de la homotecia:



- En primer lugar trazamos las bisectrices interiores de los ángulos B y C que se cortan en I.
- La paralela por I a BC corta a la bisectriz exterior del ángulo B en U.
- La paralela por U a BI corta a BC en X.
- La paralela por X a AB corta a CA en Y.
- La paralela por A a BY corta a BC en B'.

En efecto, la homotecia con centro C y razón $CB : CX$ transforma B en B', y las circunferencias trazadas en la figura se transformarán en las requeridas por el enunciado.