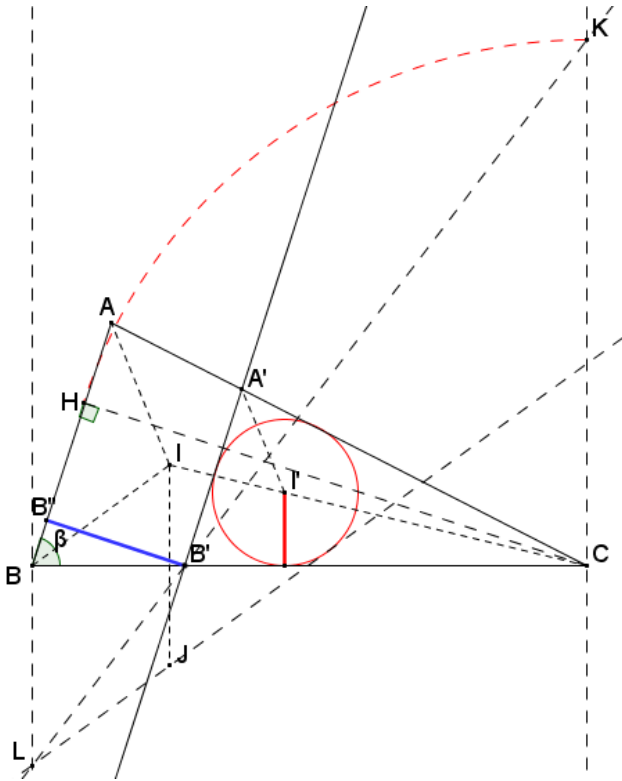


Problema 745

Dado un triángulo ABC, hallar una construcción con regla y compás de una paralela A'B' a AB tal que la distancia entre AB y A'B' sea el doble del radio de la circunferencia inscrita a A'B'C.

García Capitán, F. (2015): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On pose $BC = a$, $r =$ rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC, $r' =$ rayon r' du cercle inscrit dans le triangle A'B'C et $\beta = \text{angle } (ABC)$.

Soit $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre C et de rapport $k < 1$ qui transforme les points A et B en les points A' et B' tels que $CA'/CA = CB'/CB = k$. On a évidemment $r' = kr$

Soit B'' la projection de B' sur la droite AB. La distance entre les droites AB et A'B' est égale à $B'B'' = BB' \sin(\beta) = (1 - k) \cdot a \cdot \sin(\beta)$.

Par hypothèse : $(1 - k) \cdot a \cdot \sin(\beta) = 2r' = 2kr$. On en déduit l'expression de $k = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{2r + a \cdot \sin(\beta)}$ qui permet de construire la droite A'B' avec une règle et un compas.

Construction

Soit CH la hauteur issue de C dans le triangle ABC. On a $CH = a \cdot \sin(\beta)$. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On trace J symétrique de I par rapport à BC et $IJ = 2r$. Sur la perpendiculaire en C au côté BC, on trace du même côté que le point A, le point K' tel que $CK = CH$. La parallèle à BI passant par J coupe la perpendiculaire en B au côté BC en L. La droite KL coupe le côté BC au point B' cherché. Il ne reste plus qu'à tracer A'B' parallèle à AB.